

Feuille d'entraînement

Été 2025

Ces exercices visent à réviser les techniques de calcul vues en première et en mathématiques complémentaires. Bien sûr, le niveau sera nettement plus élevé. Aussi, il est nécessaire de maîtriser parfaitement les bases du calcul afin de ne pas être gêné par la technique lorsque nous aborderons des sujets plus abstraits.

Si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse suivante : alexpanetta10@gmail.com.

Exercice 1. (Gymnastique)

1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls et distincts. Simplifier les fractions suivantes :

(a) $\frac{(-2)^{2n+1} \times 3^{2n-1}}{4^n \times 3^{-n-1}}$.

(b) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

(c) $\frac{n^3 - p^3}{(n-p)^2} - \frac{(n+p)^2}{n-p}$.

2. Soit x un réel. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

(a) $(x-1)^3(x^2+2x+5)^2$

(b) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

3. Factoriser les trinômes du second degré suivants en utilisant leur forme canonique puis trouver leurs racines (si possible) :

(a) $x^2 + x + 1$

(b) $2x^2 - 5x + 4$

(c) $x^2 - 2x + 1$

(d) $x^2 + 5x + 6$.

4. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

(b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

(c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

5. Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$:

(a) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$

(b) $\ln(500)$

(c) $\ln\left(\frac{16}{25}\right)$.

6. Ecrire les nombres suivants le plus simplement possible :

(a) $e^{3\ln(2)}$

(b) $\ln(\sqrt{e})$

(c) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

(d) $\ln(\sqrt{e^{-\ln(e^2)}})$.

7. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(a) $1 \leq e^{-x^2+x}$

(b) $e^{1+\ln(x)} \geq 2$

(c) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$.

Exercice 2. (Continuité)

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [-1, 0]$ tel que $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. Déterminer α .

Exercice 3. (Dérivation) Donner le domaine de dérivation puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto (x^2 - 2x + 5)e^{6x}$
2. $x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + 4}$
3. $x \mapsto \frac{x^5 \ln(x)}{\sqrt{x}}$.
4. $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Exercice 4. (Intégration) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^3 (x^2 + e^x) dx$
2. $\int_0^{-1} \sin(x) dx$
3. $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int_1^e \ln(x) dx$
5. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

Exercice 5. (Equations différentielles) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) = -y(x)$
2. $y'(x) = 2y(x) + 3$.

Exercice 6. (Trigonométrie)

1. Simplifier les expressions suivantes :
 - (a) $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x)$
 - (b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les équations et inéquations suivantes :
 - (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 - (b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - (c) $\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - (d) $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$
 - (e) $\tan(x) \geq 1$.