
Corrigé de la feuille d'entraînement

Été 2025

Exercice 1. (Gymnastique)

1. (a) -2×3^{3n} .
(b) $-\frac{1}{n(n+1)^2}$.
(c) $\frac{np}{p-n}$.
2. (a) $x^7 + x^6 + 5x^5 - 11x^4 + 3x^3 - 29x^2 + 55x - 25$.
(b) $x^4 + 1$.
3. (a) $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (x - e^{\frac{2i\pi}{3}})(x - e^{\frac{4i\pi}{3}})$.
(b) $2[(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{7}{16}] = 2[(x - \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4})(x - \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4})]$.
(c) $(x - 1)^2$.
(d) $(x + 2)(x + 3)$.
4. (a) $\sqrt{3} - 1$.
(b) $2 - \sqrt{3}$.
(c) $\sqrt{3} + 1$.
5. (a) $-\ln(2) - \frac{\ln(3)}{2}$.
(b) $2\ln(2) + 3\ln(5)$.
(c) $4\ln(2) - 2\ln(5)$.
6. (a) 8.
(b) $\frac{1}{2}$.
(c) 1.
(d) -1.
7. (a) $x \in [0, 1]$.
(b) $x \in [e^{\ln(2)-1}, +\infty[$.
(c) Pas de solution.

Exercice 2. (Continuité)

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur un intervalle réel I .
Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
2. Soit $f : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1, 0]$ par $f(x) = x^2$. La fonction f est continue sur $[-1, 0]$. De plus, $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$.
Puisque $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in [-1, 0]$ tel que $f(\alpha) = \frac{1}{2}$, i.e. $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. L'unicité du réel α découle de la stricte décroissance de f sur $[-1, 0]$.
On a alors $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercise 3. (Dérivation)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (6x^2 - 10x + 28)e^{6x}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 8}{(x^2 + 4)^2}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{(9 \ln(x) + 2)x^4}{2\sqrt{x}}$.
4. $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

Exercise 4. (Intégration)

1. $\left[\frac{x^3}{3} + e^x\right]_{-2}^3 = 9 + e^3 + \frac{8}{3} - e^{-2} = \frac{35}{3} + e^3 - e^{-2}$.
2. $[-\cos(x)]_0^{-1} = 1 - \cos(-1)$.
3. $[2\sqrt{x}]_1^{16} = 8 - 2 = 6$.
4. $[x \ln(x) - x]_1^e = e - e + 1 = 1$.
5. $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Exercise 5. (Equations différentielles)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} - \frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercise 6. (Trigonométrie)

1. (a) 0.
(b) $-\sin(x)$.
2. (a) $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.
(b) $x \in \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.
(c) $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.
(d) $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$.
(e) $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.