1

Logique, ensembles et raisonnement

1.1 Logique élémentaire

1.1.1 Assertions

Définition 1

Une assertion est un énoncé mathématique dont on doit pouvoir dire si il est vrai ou faux.

Exemple 1. • L'assertion « 2024 est un nombre pair »est vraie.

• L'assertion « 2024 est un nombre premier »est fausse.

• L'assertion « $x \geq 0$ »est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; en revanche elle est fausse pour $x \in \mathbb{R}_-^*$. Par exemple, l'assertion « $-3 \geq 0$ »est évidemment fausse.

• L'assertion « $x^2 \geq 0$ »est vraie pour tout nombre réel x.

Remarque 1. L'objectif des mathématiques est de prouver (ou d'infirmer) de telles assertions.

Définition 2

• Une proposition est l'énoncé d'une assertion dont on a prouvé qu'elle était vraie.
• Un théorème est une proposition qui revêt une importance particulière.
• Un lemme est une assertion vraie qui constitue un résultat intermédiaire utile à la démonstration d'une proposition plus importante.
• Un corollaire est une assertion vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition.
• Une conjecture est une assertion qu'on pense vraie, sans en avoir de preuve.

Exemple 2. • Le théorème de Pythagore.

• La conjecture de Goldbach énonce que tout nombre pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers, mais cette assertion n'est ni prouvée ni infirmée à ce jour.

Définition 3: Négation

Soit P une assertion. La négation de P, dite « non P », notée $\neg P$, est l'assertion qui est vraie quand P est fausse, et fausse quand P est vraie.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemple 3. • La négation de « $x \geq 0$ »est « $x < 0$ ».
• La négation de « n est pair »est « n est impair ».

Remarque 2. Pour toute assertion $P, \neg(\neg P) = P$.

Définition 4: Conjonction

Soient P et Q des assertions. La conjonction des assertions P et Q, dite « P et Q », notée $P \wedge Q$, est l'assertion qui est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies et fausse lorsqu'une des assertions P ou Q est fausse.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 4. • Soit P l'assertion « n est un entier pair »et Q l'assertion « n est un entier impair ». La conjonction $P \wedge Q$ est toujours fausse.
• Soit P l'assertion « $x \geq 0$ »et Q l'assertion « $x \leq 1$ ». La conjonction $P \wedge Q$ est l'assertion « $0 \leq x \leq 1$ ».
• Soit P l'assertion « $x \geq 1$ »et Q l'assertion « $x \geq 2$ ». La conjonction $P \wedge Q$ est l'assertion « $x \geq 2$ ».

Définition 5: Disjonction

Soient P et Q des assertions. La disjonction des assertions P et Q, dite « P ou Q », notée $P \vee Q$, est l'assertion qui est vraie dès lors qu'une des assertions P ou Q est vraie et fausse lorsque les assertions P et Q sont simultanément fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 5. • Soit P l'assertion « n est un entier pair »et Q l'assertion « n est un entier impair ». La disjonction $P \vee Q$ est toujours vraie.
• Soit P l'assertion « $x \geq 1$ »et Q l'assertion « $x \geq 2$ ». La disjonction $P \vee Q$ est l'assertion « $x \geq 1$ ».

Proposition 1: Propriétés de la négation

Soient P et Q des assertions.

1. La conjonction $P \wedge (\neg P)$ est toujours fausse tandis que la disjonction $P \vee (\neg P)$ est toujours vraie.
2. La négation $\neg(P \wedge Q)$ est l'assertion $(\neg P) \vee (\neg Q)$.
3. La négation $\neg(P \vee Q)$ est l'assertion $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.

Démonstration. Ceci découle directement des définitions.

1.

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$	$P \vee (\neg P)$
V	F	F	V
F	V	F	V

2.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

3.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

■

Proposition 2: Distributivité

Soient P, Q et R des assertions.
On a :

1. $P \wedge (Q \vee R)$ est l'assertion $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
2. $P \vee (Q \wedge R)$ est l'assertion $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Démonstration. On s'en convainc aisément avec une table de vérité.

1.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

2.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

■

1.1.2 Implication, conditions nécessaires et suffisantes, équivalence

Définition 6: Implication

Soient P et Q deux assertions.
On dit que P implique Q, et on note $P \Rightarrow Q$, si la véracité de P entraîne la véracité de Q.
On dit que P est une condition suffisante à Q et que Q est une condition nécessaire à P.

Remarque 3. Pour se souvenir de la terminologie, on remarque qu'il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie et il est nécessaire que Q soit vraie pour que P soit vraie.

Exemple 6. Soit P l'assertion ≪ J'étudie au Lycée Fénelon ≫et Q l'assertion ≪ J'étudie à Paris ≫.

On a $P \Rightarrow Q$.

Il suffit d'étudier à Fénelon pour étudier à Paris mais il est nécessaire d'étudier à Paris pour étudier à Fénelon.

Définition 7: Equivalence

Soient P et Q deux assertions.
On dit que les assertions P et Q sont équivalentes, et on note $P \Leftrightarrow Q$, si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple 7. • On a l'équivalence $x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2) \vee (x = -2)$.
• On a l'implication $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$ mais l'implication réciproque est fausse.

Enfin, rappelons le principe de contraposition.

Proposition 3: Contraposition

Soient P et Q deux assertions.
Alors $P \Rightarrow Q$ si et seulement si $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Démonstration. • Supposons que $P \Rightarrow Q$.
Si l'assertion $\neg Q$ est vraie, alors l'assertion Q est fausse. Or, puisque $P \Rightarrow Q$, si P était vraie, Q le serait aussi. Donc si $\neg Q$ est vraie, P est forcément fausse, ce qui prouve que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
• Réciproquement, supposons que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
D'après le sens direct, ceci implique que $\neg(\neg P) \Rightarrow \neg(\neg Q)$, d'où $P \Rightarrow Q$. ■

Exemple 8. Reprenons l'exemple des assertions P :« J'étudie à Fénelon »et Q :« J'étudie à Paris ». On a vu que $P \Rightarrow Q$ donc $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
En effet, si je n'étudie pas à Paris, je n'ai aucune chance d'étudier à Fénelon.

Remarque 4. Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, il est courant de prouver la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ si cette dernière est plus simple à montrer.

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que n^2 pair$\Rightarrow$ n pair.
Pour cela, montrons que n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
En effet, si n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.
Ainsi, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ce qui implique que n^2 est impair.

1.2 Vocabulaire des ensembles

1.2.1 Ensembles et éléments

Définition 8

On appelle ensemble une collection d'objets de même nature, appelés éléments.
• Si E est un ensemble et x un élément de E, on note $x \in E$ pour signifier que l'élément x appartient à l'ensemble E.
• Si E est un ensemble fini, on peut dresser la liste de ses éléments en notant

$$E = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

où l'ordre des éléments x_i ne joue aucun rôle.
• On appelle ensemble vide, et on note $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.

Remarque 5. On appelle singleton un ensemble à un élément $\{a\}$; on appelle paire un ensemble à deux éléments $\{a, b\}$.

Exemple 10. • $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Ce sont des ensembles infinis.

• $\{-1,1\}, \{0\}, \{1,\pi\}, \{e\}$ sont des ensembles finis.

• $\pi \in \mathbb{R}_+$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 9: Sous-ensemble

Soient A et E deux ensembles.
On dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) de E si on a l'implication

$$x \in A \Rightarrow x \in E.$$

Dans ce cas, on dit que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.
On note $\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E.

Remarque 6. • Pour tout ensemble E, on a l'inclusion $\emptyset \subset E$.

• **ATTENTION !** Le vocabulaire est important : un élément **appartient** à un ensemble tandis qu'un ensemble est **inclus** dans un autre ensemble.

Exemple 11. $0 \in \mathbb{N}$,$\{0\} \subset \mathbb{N}$ et $\{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarque 7. On peut également définir un sous-ensemble comme étant constitué des éléments d'un ensemble qui vérifient une certaine propriété.

Par exemple, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

Proposition 4: Transitivité de l'inclusion

Soient E, F et G trois ensembles. Supposons que $E \subset F$ et $F \subset G$.
Alors $E \subset G$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Par hypothèse, $E \subset F$ donc $x \in E \Rightarrow x \in F$. Or, toujours par hypothèse, $F \subset G$ donc $x \in F \Rightarrow x \in G$.

Ainsi, on a montré l'implication $x \in E \Rightarrow x \in G$, ce qui prouve que $E \subset G$. ∎

Exemple 12. On a les inclusions

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Définition 10

Soient E et F deux ensembles.
On dit que E et F sont égaux, et on note $E = F$, si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Remarque 8. C'est souvent comme cela qu'on montre une égalité d'ensembles en pratique, c'est à dire en prouvant une double inclusion.

Sinon, on peut également montrer l'équivalence $x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

Exemple 13. On a l'égalité $[-1,0] = \{x \in \mathbb{R}_- | x^2 \leq 1\}$.

En effet, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ les équivalences

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq (-1)^2 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1,0]$$

puisqu'on a supposé $x \leq 0$.

Ceci prouve l'égalité $[-1,0] = \{x \in \mathbb{R}_- | x^2 \leq 1\}$.

Définition 11: Complémentaire

Soit E un ensemble et $A \subset E$ un sous-ensemble de E.
On appelle complémentaire de A dans E, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A, i.e.

$$\overline{A} = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Exemple 14. Soit E un ensemble. Le complémentaire de E dans E est $\overline{E} = \emptyset$ tandis que le complémentaire du vide dans E est $\overline{\emptyset} = E$.

Remarque 9. Cette définition est ambiguë : la notion de complémentaire de A dépend du plus grand ensemble E dans lequel on le plonge.

Par exemple, le complémentaire de $\{1\}$ dans $[0, 1]$ est $[0, 1[$ tandis que le complémentaire de $\{1\}$ dans $[-1, 1]$ est $[-1, 1[$.

En général, selon le contexte, il n'y a pas d'ambiguïté et la confusion n'est pas possible.

Proposition 5

Soit E un ensemble et $A \subset E$.
Le complémentaire du complémentaire de A est A lui-même, i.e.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\overline{A}} &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Leftrightarrow x \notin \{y \in E | y \notin A\} \\ &\Leftrightarrow x \in A, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité $\overline{\overline{A}} = A$. ■

Proposition 6

Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B \subset E$.
Alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Démonstration. Soit $x \in \overline{B}$. Si on avait $x \in A$, puisque $A \subset B$, ceci impliquerait que $x \in B$, ce qui est absurde.

Ainsi, si $x \in \overline{B}$, alors $x \in \overline{A}$, ce qui prouve l'inclusion $\overline{B} \subset \overline{A}$. ■

1.2.2 Réunions et intersections

Définition 12: Réunion

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle union (ou réunion) de A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble constitué des éléments appartenant à A ou à B, i.e.

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Remarque 10. • On a $A \cup B = B \cup A$.

• On peut généraliser et définir l'union d'une famille finie de sous-ensembles d'un même ensemble.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ s'il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in A_i$.

On ne considèrera cette année que des unions finies.

Exemple 15. $[1, 3] \cup [2, \pi] = [1, \pi]$.

Proposition 7: Propriétés de la réunion

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. $A \subset A \cup B$.
2. $A \cup \overline{A} = E$.
3. On a $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$. En particulier, $A \cup E = E$ et $A \cup \emptyset = A$.

Démonstration.

1. Soit $x \in A$. Par définition de $A \cup B, x \in A \cup B$ donc $A \subset A \cup B$.
2. Puisque $A \subset E$ et $\overline{A} \subset E$, on a $A \cup \overline{A} \subset E$.
   Réciproquement, soit $x \in E$. De deux choses l'une : $x \in A$ ou $x \notin A$, i.e. $x \in A \cup \overline{A}$ d'où l'inclusion $E \subset A \cup \overline{A}$ et finalement l'égalité attendue.
3. • Supposons que $A \subset B$.
   Montrons l'inclusion $A \cup B \subset B$.
   Soit $x \in A \cup B$, i.e. $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, puisque $A \subset B, x \in B$. Si $x \in B$, la conclusion est triviale. Dans tous les cas, $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$.
   L'inclusion $B \subset A \cup B$ est vraie par définition de $A \cup B$, d'où l'égalité.
   • Supposons que $A \cup B = B$. Soit $x \in A$. Par définition, $x \in A \cup B = B$, d'où $x \in B$, ce qui montre l'inclusion $A \subset B$.

■

Définition 13: Intersection

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle intersection de A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble constitué des éléments appartenant à A et à B, i.e.

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Remarque 11. • On a $A \cap B = B \cap A$.

• On peut généraliser et définir l'intersection d'une famille finie de sous-ensembles d'un même ensemble.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, $x \in A_i$.

On ne considèrera cette année que des intersections finies.

Exemple 16. $[1, 3] \cap [2, \pi] = [2, 3]$.

Proposition 8: Propriétés de l'intersection

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. $A \cap B \subset A$.
2. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
3. On a $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$. En particulier, $A \cap E = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Démonstration.

1. Soit $x \in A \cap B$. Par définition de $A \cap B, x \in A$ d'où l'inclusion $A \cap B \subset A$.
2. Soit $x \in A \cap \overline{A}$. Alors $x \in A$ et $x \notin A$, ce qui est absurde. Donc $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
3. • Supposons que $A \subset B$.
   L'inclusion $A \cap B \subset A$ a été montrée au premier alinéa.
   Réciproquement, soit $x \in A$. Par hypothèse, $A \subset B$ donc $x \in B$. Ainsi, $x \in A \cap B$ d'où l'inclusion $A \subset A \cap B$, ce qui prouve l'égalité attendue.
   • Supposons que $A \cap B = A$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$, donc par définition, $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$.

■

Remarque 12. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
L'union $A \cup B$ est alors appelée union disjointe de A et B et on la note $A \sqcup B$.
Par exemple, $A \sqcup \overline{A} = E$.

Proposition 9: Distributivité

Soit E un ensemble, soient A, B et C trois sous-ensembles de E. On a :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration.

Ces résultats découlent de la distributivité de la disjonction sur la conjonction et de la conjonction sur la disjonction.

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

■

Proposition 10: Lois de De Morgan

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E. On a :

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Démonstration.

1. $$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$
2. $$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

■

Définition 14

Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle A privé de B, et on note $A \setminus B$, l'ensemble

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Exemple 17. Soit $A =]-1, +\infty[$ et $B = [0, 1[$. Alors $A \setminus B =]-1; 0[\cup [1, +\infty[$.

1.2.3 Produit cartésien

Définition 15: Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.
On définit le produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}.$$

On appelle couple tout élément (x, y) de $E \times F$.

Exemple 18. Le produit cartésien de $E = \{0, 1\}$ avec $F = \{2, 3\}$ est l'ensemble

$$E \times F = \{(0, 2); (0, 3); (1, 2); (1, 3)\}.$$

Remarque 13. Une différence majeure avec les définitions précédentes réside en le fait que les ensembles E et F ne sont pas nécessairement des sous-ensembles d'un même ensemble, et peuvent même ne rien avoir en commun !

Par exemple, on peut tout à fait considérer le produit cartésien de l'ensemble E constitué des fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de l'ensemble F constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles.

Les éléments de ce produit cartésien $E \times F$ sont des couples de la forme $(f, (u_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Définition 16

Soient $E_1, \ldots, E_p$, p ensembles.
• On définit le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ par

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p) | x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p\}.$$

On appelle p-uplet tout élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
• Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_p = E$, on note E^p le produit cartésien $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ et on appelle p-liste tout élément de E^p.

Remarque 14. Il ne faut pas confondre la paire $\{a, b\} \subset E$ avec le couple $(a, b) \in E^2$. Notons que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mais que $(a, b) \neq (b, a)$.

1.2.4 Quantificateurs

Définition 17

• On appelle quantificateur universel, et on note $\forall$, le symbole signifiant qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble, i.e.

$$\ll \forall x \in E \gg \text{ signifie } \ll \text{pour tout élément } x \text{ dans } E \gg.$$

• On appelle quantificateur existentiel, et on note $\exists$, le symbole signifiant qu'il existe un élément d'un ensemble pour lequel une propriété est vraie, i.e.

$$\ll \exists x \in E \gg \text{ signifie } \ll \text{il existe un élément } x \text{ dans } E \gg.$$

Remarque 15. Le quantificateur $\exists$ signifie qu'il existe au moins un élément vérifiant une certaine propriété. Pour signifier qu'il en existe un seul, on écrira $\ll \exists! x \in E \gg$.

Exemple 19. • $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ et $\exists! x \in \mathbb{R}_+, x^2 = 2$.
• Soit f une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$.

Remarque 16. Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs ! Les deux phrases

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq x \gg$$

et

$$\ll \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq x \gg$$

n'ont pas du tout la même signification (d'ailleurs, la deuxième est complètement fausse).

Proposition 11: Négation des quantificateurs

Soit $P(x)$ une assertion dépendant de x.

1. La négation de l'assertion $\ll \forall x \in E, P(x)$ est vraie $\gg$ est
$$\ll \exists x \in E, P(x) \text{ est fausse } \gg.$$
2. La négation de l'assertion $\ll \exists x \in E, P(x)$ est vraie $\gg$ est
$$\ll \forall x \in E, P(x) \text{ est fausse } \gg.$$

Exemple 20. La négation de l'assertion $\ll \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \gg$est

$$\ll \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M \gg.$$

Remarque 17. Soit E un ensemble, soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E. On a les équivalences

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i.$$

1.3 Raisonnement par récurrence

1.3.1 Principe de récurrence

Proposition 12: Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend d'un entier naturel n.
On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Alors pour tout entier $n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. On admet cette proposition qui repose sur l'axiomatique de $\mathbb{N}$. ■

Exemple 21. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0, 0+1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons que $0+1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $0+1+2+\cdots+n+n+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
0+1+2+\cdots+n+n+1 &= \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Remarque 18. Voici une fonction Python qui calcule la valeur de la somme des n premiers entiers naturels non nuls :

```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+k
    return(S)
```

1.3.2 Récurrence forte

Proposition 13: Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend d'un entier naturel n.
On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ si $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1)\ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Alors pour tout entier $n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à la proposition

$$\mathcal{Q}(n) = \ll \text{ La propriété } \mathcal{P}(k) \text{ est vraie pour tout } k \in [\![n_0, n]\!] \gg .$$

■

Remarque 19. Le principe de récurrence forte est particulièrement utile pour des récurrences nécessitant la véracité de la proposition pour tous les entiers précédents ou pour un entier inférieur, mais pas forcément le précédent.

Exemple 22. Montrons par récurrence forte que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, n = 2^k(2q+1)$$

(autrement dit, tout entier supérieur ou égal à 1 est produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair).

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que la propriété est vraie pour tout entier naturel $1 \leq i \leq n$. Prouvons-la au rang $n+1$.

- Si $n+1$ est impair, on a directement l'existence de $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2^0(2q+1)$.
- Si $n+1$ est pair, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2d$.

Puisque $n \geqslant 1$, on a $2 \leqslant n+1 \leqslant 2n$, puis $1 \leq d \leqslant n$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $k' \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que

$$d = 2^{k'}(2q+1).$$

Ainsi, $n+1 = 2d = 2^{k'+1}(2q+1) = 2^k(2q+1)$ en posant $k = k'+1 \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas, la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence.

1.3.3 Récurrence de pas double

Proposition 14: Récurrence de pas double

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend d'un entier naturel n.
On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que les assertions $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Alors pour tout entier $n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à la proposition

$$\mathcal{Q}(n) = \ll \text{ Les propriétés } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \text{ sont vraies } \gg.$$

■

Remarque 20. Dans l'initialisation d'une récurrence de pas double, il ne faut pas oublier de vérifier la propriété aux deux premiers rangs !

Exemple 23. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$ donc la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, i.e. $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$. Montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$.

Par hypothèse, on a

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

1.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsqu'on cherche à établir l'ensemble des objets mathématiques satisfaisant une certaine propriété, on peut raisonner par analyse-synthèse. Ce raisonnement se réalise en deux étapes :

• **Analyse :** on déduit des informations données par l'énoncé les propriétés que les objets recherchés doivent nécessairement vérifier ;

• **Synthèse :** on vérifie que les propriétés trouvées dans l'analyse sont suffisantes. Si elles ne le sont pas, on rajoute le cas échéant des conditions sur lesdits objets, ou on restreint l'ensemble des objets trouvés dans l'analyse.

Exemple 24. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $5 - x = \sqrt{x+7}$.

• **Analyse :** Soit $x \geqslant -7$ tel que $5 - x = \sqrt{x+7}$.

En élevant cette équation au carré, on obtient $x^2 - 10x + 25 = x + 7$ d'où $x^2 - 11x + 18 = 0$. Ce trinôme du second degré admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 9$ donc si x est solution de l'équation de départ, nécessairement $x = 2$ ou $x = 9$.

• **Synthèse :** Vérifions si $x = 2$ et $x = 9$ sont bien solutions de l'équation.

Si $x = 2$, on a bien $5 - x = 3$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{9} = 3$.

Si $x = 9$, on a $5 - x = -4$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{16} = 4$ donc $x = 9$ n'est pas solution de l'équation.

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $x = 2$.