
DEVOIR MAISON N°1
A RENDRE POUR LE VENDREDI 12 SEPTEMBRE 2025

Exercice 1.

Vous êtes commissaire de police, chargé d'élucider le cambriolage d'une banque.

Vous savez que le ou les coupables du cambriolage sont parmi les trois suspects : Alice, Bob et Charlie.

Vous disposez des indices suivants, tous exacts.

- I_1 : si Charlie est innocent, Alice est coupable.
- I_2 : si Alice est coupable, elle a agi avec un complice et un seul.
- I_3 : si Bob n'a pas trempé dans cette affaire, Charlie non plus.
- I_4 : s'il y a exactement deux coupables dans cette affaire, Alice est l'un d'eux.

On note A la proposition « Alice est coupable » (de même pour B et C).

1. Ecrire les assertions I_1, I_2, I_3, I_4 en fonction de A, B, C .
2. Avec un tableau de vérité, déterminer le ou les coupables du cambriolage.

Indication : Exprimer les indices I_1, I_2, I_3, I_4 en fonction de A, B, C .

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Indication : on pourra commencer par déterminer la valeur de $f(0)$.

Exercice 3. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.