

Corrigé de la liste d'exercices n°1

Logique

Exercice 1.

1. $\exists M \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.

Négation : la fonction f n'est pas bornée ou $\forall M \geq 0, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$.

2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Négation : la fonction f est la fonction nulle ou $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Négation : la fonction f s'annule au moins une fois ou $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Négation : la fonction f n'est pas décroissante ou $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y, f(x) < f(y)$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(2)$.

Négation : la fonction f n'admet pas de minimum global en 2 ou $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < f(2)$.

Exercice 2.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Exercice 3.

1. Vrai (il suffit de prendre $x = -1$).

2. Vrai (il suffit de prendre $x = -1$).

3. Vrai (il suffit de prendre $y = x + 1$).

4. Faux (il suffit de prendre $y = 0$ et $x = 1$).

Exercice 4.

1. Faux car la négation est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ (prendre $y \leq -x$).

2. Faux pour $x = 0$ car si $y > 0$, on a $-y < 0$. La négation est donc vraie, à savoir

$$\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x + y \leq 0 \text{ ou } x - y < 0.$$

3. Faux si $x < 0$ et $y < 0$. La négation est donc vraie, à savoir

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0 \text{ et } xy > 0.$$

Exercice 5.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

3. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > a$.

4. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n - L| > \varepsilon$.

Exercice 6. L'implication $Q \Rightarrow P$ est toujours vraie. En revanche, la réciproque est fausse. Par exemple, si $F = \{f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto x + 1\}$, on a pour tout $f \in F, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ (donc P est vérifiée) mais Q est fausse : en effet, f_1 et f_2 ne s'annulent jamais simultanément.

Exercice 7. Soit x un nombre irrationnel positif.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{x}$ est rationnel i.e. $\exists(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{x} = \frac{p}{q}$.

Alors $x = \frac{p^2}{q^2}$, donc x est rationnel, ce qui est absurde.

Nécessairement, $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 8. • Si $A = B$, il est clair que $A = A \cup B = A \cap B$.

• Supposons que $A \cup B = A \cap B$.

Montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$. Puisque $A \subset A \cup B, x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$.

A fortiori $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$.

Par symétrie, on montre de même que $B \subset A$, d'où $A = B$.

On a bien montré par double implication que $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$.

Exercice 9.

1. (a) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = B \setminus A$.

2.

$$\begin{aligned} \overline{B} \cup \left(\overline{\overline{A \cap B \cap A}} \right) &= \overline{B} \cup ((\overline{A} \cap B) \cup A) \\ &= \overline{B} \cup ((\overline{A} \cup A) \cap (B \cup A)) \\ &= \overline{B} \cup (E \cap (B \cup A)) \\ &= \overline{B} \cup B \cup A \\ &= E. \end{aligned}$$

Exercice 10. • Si $A = B$, il est clair que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

• Réciproquement, supposons que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

Montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$. Puisque $A \subset A \cup C$, alors $x \in A \cup C$. Or par hypothèse, $A \cup C = B \cup C$ donc $x \in B \cup C$.

Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Nécessairement, $x \in C$, donc $x \in A \cap C$. Or, par hypothèse, $A \cap C = B \cap C$, donc $x \in B \cap C$. A fortiori, $x \in B$, ce qui est absurde.

On a donc forcément $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$.

Par symétrie des rôles joués par A et B , on montre de même que $B \subset A$, d'où $A = B$.

On a donc bien montré par double implication que $A = B$ si et seulement si $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

Exercice 11. • Montrons que $A \subset B$.

Soit $(x, y) \in A$, i.e. $4x - y = 1$.

Posons $t = x - 1$. On a bien $x = t + 1$ et $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$, ce qui prouve que $(x, y) \in B$ d'où l'inclusion $A \subset B$.

• Montrons que $B \subset A$.

Soit $(x, y) \in B$. Par définition de B , il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$.

On a alors $4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 1$, ce qui prouve que $(x, y) \in A$ d'où l'inclusion $B \subset A$.

Finalement, on a bien l'égalité $A = B$.

Exercice 12. Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

1. • **Analyse** : Soit X une partie de E telle que $A \cup X = E$.

Pour tout $x \in E$, $x \in A$ ou $x \in X$ donc si $x \notin A$, alors $x \in X$. Ainsi, si $x \in \overline{A}$, alors $x \in X$, ce qui prouve que $\overline{A} \subset X$.

• **Synthèse** : Supposons que X est une partie de E telle que $\overline{A} \subset X$. Montrons que $A \cup X = E$.

L'inclusion $A \cup X \subset E$ est immédiate. Il suffit de montrer que $E \subset A \cup X$.

Soit $x \in E$. Il y a deux cas :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup X$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$. Or, $\overline{A} \subset X$ donc $x \in X$. A fortiori, $x \in A \cup X$.

Dans les deux cas, $x \in A \cup X$, ce qui prouve que $E \subset A \cup X$.

Finalement, on a bien l'égalité $A \cup X = E$ si et seulement si $\overline{A} \subset X$.

2. Vu en cours.

3. Vu en cours.

Exercice 13.

1. On a $B \Delta A = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$.
2. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.
3. • $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.
 • $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.
 • $A \Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$.
 • Supposons que $A \subset B$. Alors

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \cup (B \setminus A) = B \setminus A.$$

4.

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cup (A \Delta \overline{B}) &= [(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)] \\ &= E \cap E \cap E \cap E \\ &= E. \end{aligned}$$

5. (a) On a

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &= (A \cup (B \Delta C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B \Delta C}) \\ &= [A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \cap [\overline{A} \cup \overline{(B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})}] \\ &= [A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \cap [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)] \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C). \end{aligned}$$

De même, $(A \Delta B) \Delta C = C \Delta (B \Delta A)$ donc en échangeant A et C par rapport au calcul précédent, on obtient

$$(A \Delta B) \Delta C = (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (C \cap B \cap A) \cup (\overline{C} \cap B \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap \overline{B} \cap A) = A \Delta (B \Delta C).$$

(b)

$$\begin{aligned} (A \cap B) \Delta (A \cap C) &= [(A \cap B) \cap \overline{A \cap C}] \cup [\overline{A \cap B} \cap (A \cap C)] \\ &= [(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})] \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)] \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\ &= A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \\ &= A \cap (B \Delta C). \end{aligned}$$

Exercice 14. Supposons qu'il existe E et F deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = E \times F$.

Le point $(1, 0) \in \mathcal{D}$ donc $1 \in E$. De même, $(0, 1) \in \mathcal{D}$ donc $1 \in F$.

Ainsi, $(1, 1) \in E \times F = \mathcal{D}$. Or, $1^2 + 1^2 > 1$ donc $(1, 1) \notin \mathcal{D}$. On aboutit donc à une contradiction, ce qui prouve que $\mathcal{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Initialisation :

On a $u_0 = -1$ et $u_1 = e^{u_0} = e^{-1}$ donc on a bien $u_1 > u_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , i.e. $u_{n+1} > u_n$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$, i.e. $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1} > u_n$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il vient

$$e^{u_{n+1}} > e^{u_n} \Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 16.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_0 + 7 = 8 = 2^3$.

Pour $n = 1$, $u_2 = u_1 + 3 \times 4 + 7 = 27 = 3^3$.

Pour $n = 2$, $u_3 = u_2 + 6 \times 5 + 7 = 64 = 4^3$.

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^3$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^3$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = (0 + 1)^3$, ce qui vérifie la propriété au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = (n + 1)^3$. Montrons que $u_{n+1} = (n + 2)^3$.

Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$u_{n+1} = u_n + 3n(n + 3) + 7.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = (n + 1)^3$ donc

$$u_{n+1} = (n+1)^3 + 3n(n+3) + 7 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3n^2 + 9n + 7 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = (n+2)^3,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^3$.

Exercice 17. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , 17 divise $u_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3 \times 5 + 2 = 17$ donc 17 divise bien u_0 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que 17 divise $u_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, i.e. il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $17d = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Montrons que 17 divise $u_{n+1} = 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$3 \times 5^{2n+1} = u_n - 2^{3n+1} = 17d - 2^{3n+1}$$

donc

$$3 \times 5^{2n+3} = 3 \times 5^{2n+1} \times 5^2 = 25(17d - 2^{3n+1}).$$

Ainsi, $u_{n+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 25 \times 17d - 25 \times 2^{3n+1} + 2^{3n+1} \times 2^3 = 25 \times 17d + 2^{3n+1}(8 - 25)$

d'où $u_{n+1} = 17(25d - 2^{3n+1})$, ce qui prouve que 17 divise u_{n+1} .

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise u_n .

Exercice 18. Par définition, on a $u_2 = 2u_1^2 - u_0 = 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta)$.

On peut donc conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.

Montrons cette propriété par récurrence de pas double.

Initialisation : On a $u_0 = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $u_1 = \cos(1 \times \theta)$ donc la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \cos(n\theta)$ et $u_{n+1} = \cos((n+1)\theta)$.

Montrons que $u_{n+2} = \cos((n+2)\theta)$.

Par définition, on a

$$u_{n+2} = 2u_1u_{n+1} - u_n = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

Or, $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$.

Ainsi, $u_{n+2} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+2$.

D'après le principe de récurrence de pas double, on a bien montré que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta).$$

Exercice 19. Montrons par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe des nombres premiers $(p_1, \dots, p_k)$ et des entiers $\alpha_i \geq 1$ tels que

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

Pour $n = 2$, on a $2 = 2^1$ avec 2 qui est un nombre premier donc la propriété est vraie au rang $n = 2$.

Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout entier $a \in \llbracket 2, n \rrbracket$, il existe des nombres premiers $(p_1, \dots, p_k)$

et des entiers $\alpha_i \geq 1$ tels que $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$. Montrons la propriété au rang $n+1$.

- Si $n+1$ est un nombre premier, alors $n+1 = (n+1)^1$ avec $n+1$ qui est un nombre premier donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, alors il existe deux entiers a et b avec $1 < a < n+1$ et $1 < b < n+1$ tels que $n+1 = ab$.

Puisque $(a, b) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, par hypothèse de récurrence forte, il existe des nombres premiers $(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_k)$ et des entiers $\alpha_i \geq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tels que

$$a = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad b = \prod_{i=r+1}^k p_i^{\alpha_i},$$

donc

$$n+1 = ab = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(L'énoncé ne demandait pas de montrer que les nombres premiers étaient distincts. Il peut donc y avoir des redondances entre les nombres premiers $(p_1, \dots, p_r)$ qui divisent a et les nombres premiers (p_{r+1}, p_k) qui divisent b . On aurait pu s'arranger pour obtenir une décomposition en facteurs premiers avec des nombres premiers distincts, mais la rédaction aurait été un peu différente (et un peu plus lourde).)

Exercice 20. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $f(x) + xf(1-x) = 1+x$.

En appliquant cette égalité fonctionnelle à $1-x$, on a pour tout réel x ,

$$f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1+1-x,$$

i.e.

$$f(1-x) = (x-1)f(x) + 2-x.$$

En injectant cette valeur de $f(1-x)$ dans la première équation fonctionnelle, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + x(x-1)f(x) + 2x - x^2 = 1+x$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)(x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1$$

ou encore pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 - x + 1)(f(x) - 1) = 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 \neq 0$ (c'est un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif).

On en déduit que nécessairement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, i.e. f est nécessairement la fonction constante égale à 1.

Synthèse : Soit f la fonction constante égale à 1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(x) + xf(1-x) = 1+x$.

On en conclut que l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tout réel x , $f(x) + xf(1-x) = 1+x$ est la fonction constante égale à 1.