Lycée Fénelon
Année 2025-2026

BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir maison n°1

Exercice 1.

1. $I_1 : \neg C \Rightarrow A$, ce qui s'écrit également $A \vee C$.
   $I_2 : A \Rightarrow (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$.
   $I_3 : \neg B \Rightarrow \neg C$, ou par contraposée, $C \Rightarrow B$.
   Par contraposée, I_4 signifie que si Alice est innoncente, alors il y a un seul coupable (qui est nécessairement Bob ou Charlie) donc
   $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$.
2. Dressons les tableaux de vérité des indices I_1, I_2, I_3 et I_4 en fonction de la culpabilité d'Alice, de Bob ou de Charlie. Dans chaque colonne, un V signifiera que la personne est coupable, tandis qu'un F signifiera que la personne est innocente. Enfin, étant impossible que les trois soient innocents, on écartera ce cas là.

A	B	C	I_1
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

A	B	C	I_2
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

A	B	C	I_3
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

A	B	C	I_4
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

Notons $I = I_1 \wedge I_2 \wedge I_3 \wedge I_4$ et dressons le tableau de vérité de I.

A	B	C	I
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

On constate alors que la seule possibilité est la suivante :

$$\boxed{\text{Alice et Bob sont coupables, et Charlie est innoncent.}}$$

Exercice 2. Raisonnons par analyse-synthèse.
•**Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \,\text{ou}\, f(0) = 1.$$

Supposons que $f(0)=0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors en posant $y=0$:

$$f(x)f(0)-f(0)=x \Leftrightarrow x=0,$$

et ce pour tout réel x, ce qui est absurde.
Nécessairement, on a $f(0)=1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en posant $y=0$:

$$f(x)f(0)-f(0)=x \Leftrightarrow f(x)=x+1.$$

•**Synthèse :** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x)=x+1$.
On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y)-f(xy)=(x+1)(y+1)-xy-1=xy+x+y+1-xy-1=x+y.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'unique fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ à vérifier cette propriété est } \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1. \end{array}}$$

Exercice 3. Montrons cette inégalité par récurrence de pas double.
Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=0 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^0=1$ et $u_1=1 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^1=\frac{5}{3}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$.
Montrons que $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$.
Par définition, on a

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{5}{3}\right)^n=\left(\frac{5}{3}\right)^n\left(\frac{5}{3}+1\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{8}{3}.$$

Or, $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9} \geqslant \frac{8}{3}=\frac{24}{9}$.
Ainsi, on a bien

$$u_{n+2} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+2$.
On a donc bien montré par une récurrence de pas double que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n.}$