5 Dénombrement

5.1 Ensembles finis

5.1.1 Cardinal

Commençons par un lemme préliminaire, utile en soi.

Lemme 1

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ deux entiers naturels non nuls.

1. Il existe une injection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n \leq p$.
2. Il existe une surjection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n \geq p$.
3. Il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n = p$.

Démonstration.

1. • Supposons que $n \leq p$.
   Alors l'application $\begin{array}{rcl} f : [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array}$ est injective.
   • Supposons qu'il existe une injection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Alors les éléments $f(1), \dots, f(n)$ de $[\![1,p]\!]$ sont deux à deux distincts. Ainsi, l'ensemble $\{f(1), \dots, f(n)\}$ est une sous-partie de $[\![1,p]\!]$ à n éléments. A fortiori, $n \leq p$.
2. • Supposons que $n \geq p$. Alors l'application
   $$\begin{array}{rcl} f : [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \leq p \\ p & \text{si } k > p \end{cases} \end{array}$$
   est surjective.
   • Supposons qu'il existe une surjection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe $x_k \in [\![1,n]\!]$, tel que $f(x_k) = k$. On a nécessairement $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ puisque $f(x_i) = i \neq j = f(x_j)$.
   Ainsi, l'ensemble $\{x_k | 1 \leq k \leq p\}$ est une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$. A fortiori, $n \geq p$.
3. • Supposons que $n = p$. Alors $[\![1,n]\!] = [\![1,p]\!]$ et $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est bien une bijection.
   • Supposons qu'il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Puisque f est injective, d'après le premier point, $n \leqslant p$.
   Puisque f est surjective, d'après le deuxième point, $n \geqslant p$. Finalement, on a bien $n = p$.

■

Définition 1: Ensembles en bijection

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont en bijection s'il existe une application $\varphi : E \longrightarrow F$ bijective.

Remarque 1. Dans ce cas, il existe également une bijection $\varphi^{-1} : F \longrightarrow E$.

Définition 2: Ensemble fini

Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $[\![1, n]\!]$ et E sont en bijection.
Dans ce cas, on dit que E est de cardinal n et on note $\text{card}(E) = n$ (ou $\#E = n$).
Concrètement, ceci signifie que E contient n éléments et on peut en dresser la liste en notant par exemple

$$E = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Remarque 2. D'après le lemme, l'entier naturel n tel que $[\![1, n]\!]$ est en bijection avec E est unique.

En effet, s'il existe $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ bijective et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow E$ bijective, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une bijection d'où $n = p$ d'après le lemme.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considèrerons que des ensembles finis.

Remarque 3. • Par convention, $\text{card}(\emptyset) = 0$.
• Un ensemble non fini est dit infini. C'est par exemple le cas des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Exemple 1. • $\text{card}\{2\} = 1; \text{card}\{\sqrt{2}, \pi\} = 2; \text{card}\{(1, 2)\} = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\text{card}([\![1, n]\!]) = \text{card}([\![0, n-1]\!]) = n$.
• Si $p \leq q, \text{card}[\![p, q]\!] = q - p + 1$.

5.1.2 Propriétés

Proposition 1: Cardinal d'une union disjointe

Soit E un ensemble fini non vide, soient A et B des parties disjointes de E (i.e. $A \cap B = \emptyset$).
Alors $\text{card}(A \sqcup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Démonstration. Soit $n = \text{card}(A)$ et $p = \text{card}(B)$. Il existe deux bijections $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow A$ et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow B$.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} f : [\![1, n+p]\!] & \longrightarrow & A \sqcup B \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \psi(k-n) & \text{si } n+1 \leq k \leq n+p. \end{cases} \end{array}$$

• Prouvons que f est injective.

Soient $(i, j) \in [\![1, n+p]\!]^2$ tels que $f(i) = f(j)$.

- Si l'un des deux indices est dans $[\![1, n]\!]$ et l'autre dans $[\![n+1, n+p]\!]$, par exemple si $1 \leq i \leq n$ et $n+1 \leq j \leq n+p$, on a $f(i) = \varphi(i) \in A$ et $f(j) = \psi(j-n) \in B$ donc $f(i) = f(j) \in A \cap B = \emptyset$, ce qui est absurde. Ce cas est donc impossible.

- Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, alors $f(i) = f(j) \Leftrightarrow \varphi(i) = \varphi(j) \Leftrightarrow i = j$ par injectivité de φ.

- Si $(i, j) \in [\![n+1, n+p]\!]^2$, alors $f(i) = f(j) \Leftrightarrow \psi(i-n) = \psi(j-n) \Leftrightarrow i - n = j - n$ par injectivité de ψ, d'où $i = j$.

On a donc bien montré que si $f(i) = f(j)$, alors $i = j$, ce qui prouve l'injectivité de f.

• Prouvons que f est surjective.

Soit $x \in A \sqcup B$. Si $x \in A$, par surjectivité de φ, il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que $f(k) = \varphi(k) = x$. Si $x \in B$, par surjectivité de ψ, il existe $k \in [\![n+1, n+p]\!]$, tel que $f(k) = \psi(k-n) = x$.

Ainsi, pour tout $x \in A \sqcup B$, il existe $k \in [\![1, n+p]\!]$ tel que $f(k) = x$. On a donc bien prouvé que f est surjective.

On en déduit que $f : [\![1, n+p]\!] \longrightarrow A \cup B$ est bijective. Par définition, ceci implique que

$$\text{card}(A \sqcup B) = n + p = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

■

Corollaire 1

Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de E deux à deux disjointes (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k).$$

Démonstration. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1, \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right) = \text{Card}(A_1) = \sum_{k=1}^{1} \text{card}(A_k)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que la propriété est vraie au rang n. Montrons-la au rang $n+1$.

Tout d'abord, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et A_{n+1} sont disjoints :

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1}) = \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset.$$

On peut donc appliquer la proposition précédente et on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \text{card}(A_{n+1}).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

d'où

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k) + \text{card} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \text{card}(A_k),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

Corollaire 2: Lemme des bergers

Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de E deux à deux disjointes (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) et de même cardinal $p \in \mathbb{N}$ (i.e. pour tout $k \in [\![1, n]\!], \text{card}(A_k) = p$), on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = n \times p.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent et on obtient

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

■

Proposition 2

Soit E un ensemble fini non vide. Soient A et B des parties de E.

1. $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.
2. Si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ avec égalité si et seulement si $A = B$.
3. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Démonstration.

1. On a $E = A \sqcup \overline{A}$ avec A et $\overline{A}$ disjoints donc d'après la proposition précédente,

$$\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(\overline{A}),$$

d'où le résultat.

2. Supposons que $A \subset B$. Alors $B = A \cup (B \setminus A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. En utilisant la proposition précédente, on a donc

$$\text{card}(B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A).$$

Puisque $\text{card}(B \setminus A) \geq 0$, on a bien l'inégalité voulue.
Par ailleurs, $\text{card}(A) = \text{card}(B) \Leftrightarrow \text{card}(B \setminus A) = 0 \Leftrightarrow B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A$ d'où $A = B$.

3. $A \cup B$ peut s'écrire comme union d'ensembles deux à deux disjoints de la façon suivante :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

donc

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A).$$

Par ailleurs, on a de même $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ et $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ d'où

$$\text{card}(A) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B) \quad \text{et} \quad \text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A).$$

En sommant, on a donc

$$\begin{aligned} \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) &= 2\text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) - \text{card}(A \cap B) \\ &= \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) \\ &= \text{card}(A \cup B). \end{aligned}$$

■

5.1.3 Injections, surjections et bijections entre ensembles finis

Théorème 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides.
Alors :

1. Il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
2. Il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
3. E et F sont en bijection si et seulement si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Démonstration. Soit $n = \text{card}(E)$ et $p = \text{card}(F)$. Il existe des bijections $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow F$.

1. • Supposons qu'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$.
   Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une injection comme composée d'injections.
   D'après le lemme, ceci implique que $\text{card}(E) = n \leq p = \text{card}(F)$.
   • Supposons que $n \leq p$.
   D'après le lemme, il existe une injection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
   Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une injection comme composée d'injections.
2. • Supposons qu'il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$.
   Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une surjection comme composée de surjections.
   D'après le lemme, ceci implique que $\text{card}(E) = n \geq p = \text{card}(F)$.
   • Supposons que $n \geq p$.
   D'après le lemme, il existe une surjection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
   Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une surjection comme composée de surjections.
3. • Supposons qu'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.
   Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une bijection comme composée de bijections.
   D'après le lemme, ceci implique que $\text{card}(E) = n = p = \text{card}(F)$.
   • Supposons que $n = p$.
   D'après le lemme, il existe une bijection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
   Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une bijection comme composée de bijections.

■

Proposition 3

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que

$$\text{card}(E) = \text{card}(F).$$

Alors :

1. Toute injection de E dans F est bijective.
2. Toute surjection de E dans F est bijective.

Démonstration.

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une injection.
   Alors $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ est bijective ce qui implique que $\text{card}(E) = \text{card}(f(E))$.
   Or, $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$.
   Puisque $f(E) \subset F$, ceci implique que $f(E) = F$, donc f est surjective.
   f étant à la fois injective et surjective, f est bijective.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une surjection. Soit $p = \text{card}(F)$. Notons $y_1, \dots, y_p$ les éléments de F.
   Puisque f est surjective, pour tout $1 \leq k \leq p$, il existe $x_k \in E$ tel que $f(x_k) = y_k$.
   Soit $A = \{x_k | 1 \leq k \leq p\}$.
   Par construction, la restriction de f à A, $f_{|A} : A \longrightarrow F$ est injective et surjective, donc bijective.
   On en déduit que $\text{card}(A) = \text{card}(F) = \text{card}(E)$, et puisque $A \subset E$, ceci implique que $A = E$.
   Finalement, $f_{|A} = f$, donc f est bijective.

■

Remarque 4. Le procédé utilisé dans la dernière preuve est général : pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on peut toujours trouver une partie $A \subset E$ telle que la restriction de f à A $f_{|A} : A \longrightarrow f(E)$ soit bijective.

Il en découle directement le corollaire suivant :

Corollaire 3

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On a les équivalences :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Remarque 5. Autrement dit, pour montrer qu'une application entre ensembles finis de même cardinal est bijective, il suffit de montrer l'injectivité ou la surjectivité.

En revanche, si E est un ensemble infini, il peut exister une application $f : E \longrightarrow F$ qui soit injective (ou surjective) mais pas bijective.

Par exemple, l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ est injective mais pas surjective tandis que l'application $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \end{array}$ est surjective mais pas injective.

5.2 Cardinaux remarquables

5.2.1 Cardinal d'un produit cartésien

Proposition 4: Cardinal d'un produit cartésien

Soient E et F deux ensembles finis.
Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et son cardinal vérifie

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Démonstration. Soit $n = \text{card}(E)$.
Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Alors $E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} (\{x_i\} \times F)$ avec $(\{x_i\} \times F) \cap (\{x_j\} \times F) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Ainsi, $\text{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(\{x_i\} \times F)$.

Or, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a une bijection $\begin{array}{rcl} f_i : \{x_i\} \times F & \longrightarrow & F \\ (x_i, y) & \longmapsto & y \end{array}$ donc

$$\text{card}(\{x_i\} \times F) = \text{card}(F).$$

Il en découle que

$$\text{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(F) = n\text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

■

Remarque 6. C'est le nombre de façons de choisir de façon indépendante un élément de E et un élément de F.

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$\text{card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \prod_{k=1}^{p} \text{card}(E_k).$$

Corollaire 4

Soit E un ensemble fini.
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p.$$

Autrement dit, si $\text{card}(E) = n$, il y a n^p p-uplets (ou p-listes) de E.

Remarque 7. Soit $n = \text{card}(E)$. Le nombre $\text{card}(E^p)$ désigne le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts, avec d'éventuelles répétitions.

Exemple 2. Soit $E = \{0, 1\}$. Alors

$$E^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

contient $2^3 = 8$ éléments.

5.2.2 Nombre d'applications entre ensembles finis

Proposition 5: Cardinal de F^E

Soient E et F deux ensembles finis non vides. Soit F^E l'ensemble des applications de E dans F.
Alors

$$\text{card}(F^E) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

Remarque 8. Ceci justifie la notation F^E, qui est utilisée même dans le cas où les ensembles sont infinis (par exemple dans le cas des suites réelles, que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Démonstration. Soit $n = \text{card}(E)$. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est entièrement caractérisée par la donnée du n-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in F^n$.

Il y a donc autant d'applications de E dans F que de n-uplets dans F^n, c'est à dire d'après la section précédente, $\text{card}(F)^n = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$. ■

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement 2^n applications de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$.

Définition 3: p-uplet sans répétition

Soit E un ensemble non vide. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ est dit sans répétition si

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

Autrement dit, $(x_1, \dots, x_p)$ est dit sans répétition si les éléments du p-uplet sont distincts deux à deux.

Remarque 9. • Le nombre de p-uplets sans répétition est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts sans répétition.

• Si $p > \text{card}(E)$, il n'existe pas de p-uplets de E sans répétition.

Proposition 6: Nombre de p-uplets sans répétition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
Le nombre de p-uplets sans répétition de E est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration. Construisons un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

On peut choisir le premier élément $x_1 \in E$ de n façons différentes.

On peut choisir le deuxième élément $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ de $n-1$ façons différentes.

On peut choisir le troisième élément $x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$ de $n-2$ façons différentes, etc...

On peut choisir le p-ème élément $x_p \in E \setminus \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$ de $n-(p-1) = n-p+1$ façons différentes.

Il y a donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ façons de construire un p-uplet sans répétition.

D'autre part, on a bien

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-p} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-p} k \prod_{k=n-p+1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-p} k} = \prod_{k=n-p+1}^{n} k = n(n-1)\dots(n-p+1).$$

■

Exemple 4. Le nombre de façons de tirer successivement et sans remise trois boules dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 est égal à

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Corollaire 5: Nombre d'applications injectives entre ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$ avec $n \leq p$.
Il y a $\dfrac{p!}{(p-n)!}$ applications injectives de E dans F.

Démonstration. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Une application injective $f : E \longrightarrow F$ est entièrement caractérisée par la donnée du n-uplet sans répétition (par injectivité de f) $(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Il y a donc autant d'applications injectives de E dans F que de n-uplets sans répétition dans F qui est de cardinal p, à savoir $\dfrac{p!}{(p-n)!}$. ■

Définition 4: Permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle permutation de E tout n-uplet de E contenant exactement une fois chaque élément de E.

Proposition 7: Nombre de permutations d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Il y a $n!$ permutations de E.

Démonstration. Une permutation est un n-uplet sans répétition de E : il y en a donc $\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$. ■

Remarque 10. $n!$ est le nombre de façons de choisir successivement et sans répétition tous les objets d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 5. Les permutations de $[\![1, 3]\!]$ sont au nombre de 6 :

$$(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1).$$

Corollaire 6: Nombre de bijections entre ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Il y a $n!$ bijections de E dans F.

Démonstration. Il y a $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ injections de E dans F. Or, une application de E dans F est injective si et seulement si elle est bijective puisque E et F ont même cardinal, d'où le résultat. ■

Remarque 11. Il y a donc $n!$ bijections de E dans E. On appelle également permutations ces bijections.

5.2.3 Cœfficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Définition 5: Cœfficients binomiaux

Soient k un entier relatif et n un entier naturel. On définit le cœfficient binomial k parmi n, noté $\dbinom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0 \\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Remarque 12. Notons que par convention, $\dbinom{0}{0} = 1$.

Exemple 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1; \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1; \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n; \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n.$$

On a également $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 6: Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle p-combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Exemple 7. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble des 2-combinaisons de E (aussi appelées paires) est

$$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

On constate qu'il y en a $\displaystyle\binom{3}{2} = 3$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 8: Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
Il y a $\displaystyle\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.

Démonstration. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Construisons une partie à p éléments de E.
Si $p = 0$, seul l'ensemble vide convient. Il y a donc bien $\binom{n}{0} = 1$ 0-combinaison de E.
Supposons que $1 \leq p \leq n$.

Commençons par construire un p-uplet sans répétition de E. Il y a $\displaystyle\frac{n!}{(n-p)!}$ façons de choisir un tel p-uplet. Notons-le $(x_1, \ldots, x_p)$. On en déduit naturellement une partie à p-éléments de E, à savoir $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$.

Or, toute permutation de A est un p-uplet sans répétition dont on aurait déduit la même partie à p éléments.

Autrement dit, il y a $p!$ p-uplets qui mènent à la même partie de E à p éléments.

Il faut donc diviser le nombre de p-uplets sans répétition de E par $p!$ pour obenir le nombre de p-combinaisons de E.

Il y a donc bien $\displaystyle\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$ p-combinaisons de E. ∎

Remarque 13. $\displaystyle\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n objets distincts. L'ordre desdits éléments n'est pas pris en compte.

Exemple 8. Dans un jeu de 52 cartes, il y a $\displaystyle\binom{52}{5}$ mains de 5 cartes possibles.

Les cœfficients binomiaux ont des propriétés calculatoires intéressantes que nous allons désormais énoncer.

Proposition 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

2. $$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Démonstration.

1. • Preuve combinatoire : Soit E un ensemble à n éléments. $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E à k éléments. Or, construire une partie à k éléments revient exactement à construire son complémentaire, c'est à dire à choisir les $n-k$ éléments parmi n qui ne vont pas constituer cette partie. D'où l'égalité attendue.

   • Preuve calculatoire : Remarquons d'abord que si $0 \leq k \leq n$, alors $0 \leq n-k \leq n$. On a
   $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

2. • Preuve combinatoire : On dispose d'une classe de $n+1$ élèves. On souhaite compter le nombre de façons de former une équipe de $k+1$ personnes disposant d'un capitaine.

   Il y a deux manières de faire :

   - On choisit les $k+1$ personnes qui vont consituer l'équipe ($\binom{n+1}{k+1}$ façons de le faire) parmi lesquelles on choisit un capitaine ($k+1$ façons de le faire).

   Il y a donc $(k+1) \times \binom{n+1}{k+1}$ façons de former ces équipes.

   - On commence par choisir le capitaine de l'équipe ($n+1$ possibilités) puis on choisit les k autres personnes de l'équipe parmi les n restantes ($\binom{n}{k}$ façons de le faire).

   Il y a donc $(n+1) \times \binom{n}{k}$ façons de former ces équipes.

   Finalement, on a donc $(k+1) \times \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \times \binom{n}{k}$ d'où $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

   • Preuve calculatoire :On a
   $$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

■

La relation la plus célèbre et la plus importante à bien des égards portant sur les cœfficients binomiaux est la suivante :

Proposition 10: Relation de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration. • Si $k < 0$, tous les cœfficients binomiaux en question sont nuls donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k = 0$, on a $\binom{n}{-1} = 0$ et $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k > n+1$, tous les cœfficients binomiaux sont nuls en question sont nuls donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k = n+1$, on a $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ donc l'égalité est vérifiée.

• Supposons dorénavant que $1 \leq k \leq n$ de telle sorte que tous les cœfficients binomiaux en jeu soient non nuls. (Si $n = 0$, les quatre cas précédents couvrent tous les cas possibles).

Donnons d'abord une preuve combinatoire. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments dont on souhaite construire une partie A à k éléments (ce qui peut se faire de $\binom{n+1}{k}$ façons différentes). Soit $a \in E$.

Il y a deux possibilités qui s'excluent :

- Soit on choisit a pour le mettre dans A et il reste alors à choisir $k-1$ éléments parmi les n autres de E pour compléter A, ce qui peut se faire de $\binom{n}{k-1}$ façons différentes ;

- Soit on laisse a de côté et il reste alors à choisir k éléments parmi les n autres de E pour compléter A, ce qui peut se faire de $\binom{n}{k}$ façons différentes.

En additionnant les possibilités issues des deux cas, on trouve bien

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

On peut sinon vérifier cette relation par le calcul :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn! + (n-k+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 14. (Triangle de Pascal)

La relation de Pascal permet de calculer les cœfficients binomiaux de manière récursive en les disposant dans un triangle, à la manière de Pascal.

Ainsi, pour obtenir le cœfficient en ligne $n+1$ et colonne k, il suffit d'ajouter les deux cœfficients qui se situent au-dessus et au-dessus à gauche de ce dernier, c'est à dire les cœfficients en ligne n et colonnes k et $k-1$. On obtient le triangle ci-dessous :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

On rappelle les identités remarquables bien connues :

Proposition 11: Identités remarquables

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :
1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exemple 9. En utilisant, la première identité remarquable, on trouve aussi que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Plus généralement, essayons de donner une formule permettant de calculer $(a+b)^n$ pour tout entier naturel n.

Proposition 12: Formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. Montrons cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Montrons que la propriété reste vraie au rang $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \quad (i = k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \quad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. La deuxième égalité s'obtient en échangeant les rôles de a et b. ∎

Remarque 15. On peut également donner une preuve combinatoire de cette formule.

En effet, lorsqu'on développe $(a+b)^n$, on regroupe les termes par monômes de la forme $a^k b^{n-k}$. Pour cela, on choisit les k facteurs $a+b$ dans lesquels on choisira le a (il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire) et on choisit b dans les autres facteurs (il n'y a qu'un seul choix pour cela).

Pour tout $0 \leq k \leq n$, il y a donc $\binom{n}{k}$ facteurs de la forme $a^k b^{n-k}$, d'où le résultat.

Exemple 10.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^0b^4 + \binom{4}{1}a^1b^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^3b + \binom{4}{4}a^4b^0 \\ &= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.\end{aligned}$$

Corollaire 7

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le binôme de Newton à a et $-b$ et utiliser le fait que $(-b)^{n-k} = (-1)^{n-k} b^{n-k}$ et $(-b)^k = (-1)^k b^k$. ∎

Exemple 11. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Enfin, la formule du binôme de Newton permet également de calculer le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Proposition 13: Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini. Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et son cardinal vérifie

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\operatorname{card}(E)}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration. Soit $n = \operatorname{card}(E)$.

• Preuve combinatoire : Listons les éléments de $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Si on souhaite former une partie A de E, on passe en revue les éléments de E et pour chacun, on a deux choix : le prendre dans A ou ne pas le prendre. Il y a donc 2 possibilités pour x_1, 2 possibilités pour $x_2, \ldots,$ 2 possibilités pour x_n.

Il y a donc 2^n façons de former une partie de E d'où le résultat.

• Preuve calculatoire : Pour tout $0 \leq k \leq n$, il y a $\displaystyle\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments. Pour calculer le nombre de parties de E, il faut donc sommer pour tout $0 \leq k \leq n$ le nombre de parties de E à k éléments, i.e.

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

∎