Lycée Fénelon — BCPST1
Année 2025-2026 — A. Wassfi

Devoir maison n°2
A rendre pour le mercredi 8 octobre 2025

Exercice 1

Soit l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x-5}{2x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f.
2. Démontrer que f est bijective de E vers un ensemble à définir et déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Considérons l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 5x + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f([-4;1])$ et $f([-1;+\infty[)$.

Exercice 3

Soit E un ensemble, A, B deux parties fixées de E. Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} P(E) & \longrightarrow & P(A) \times P(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$

1. Déterminer $\phi(\emptyset)$ et $\phi(\overline{A \cup B})$.
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\emptyset, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?
5. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que ϕ soit bijective. Déterminer ϕ^{-1} dans ce cas.

Exercice 4

Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le nombre de solutions de l'équation

$$x + y + z = n, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{N}^3$$