Devoir surveillé de mathématiques n°1

Samedi 20 septembre 2025 (2h00)

L'énoncé est constitué de quatre exercices, deux problèmes et comporte 3 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-3)(k-1)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}5^{-2k.}$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{3i}{j+1}$.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

1. Calculer u_2 et u_3. *On écrira les résultats sous forme de fraction irréductible.*
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n+1}{2n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{5x}{x+1} - \dfrac{4x}{x-2} = 0$
2. $|3x+1| = |5x-8|$
3. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2+x-6}$

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leqslant \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
   (a) Montrer que $(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.
   (b) En déduire que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leqslant \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
2. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
   (a) Montrer alors que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
   (b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que p^2 pair $\Longrightarrow p$ pair.
   (d) En déduire que l'égalité de la question 2. (b) est absurde.
   (e) Conclure.

Problème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.

1. Enoncer la négation de la propriété $\mathscr{P}$.
2. Donner un exemple de suite (non constante) ne vérifiant pas la propriété $\mathscr{P}$.
3. Déterminer les suites constantes vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.
4. On cherche à savoir si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$, vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
   (c) Conclure.

Problème 2

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est un point isolé de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}. \qquad (*)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.
2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.
3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.
4. (a) Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :
   $$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$
   (b) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.
5. (a) Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.
   (b) Soit $C = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.
6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :
   $$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \qquad (**)$$