Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°1
Samedi 20 septembre 2025 (2h00)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-3)(k-1)$.

$$\sum_{k=0}^{n}(k-3)(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 4k + 3 = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 4\sum_{k=0}^{n} k + 3\sum_{k=0}^{n} 1$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-3)(k-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18(n+1)}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1) - 12n + 18\right]}{6}$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-3)(k-1) = \frac{(n+1)(2n^2 - 11n + 18)}{6}}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}5^{-2k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}5^{-2k} = 3^{-1}\sum_{k=0}^{n} 3^k \times (5^{-2})^k = 3^{-1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{25}\right)^k.$$

Puisque $\dfrac{3}{25} \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}5^{-2k} = 3^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{25}} = 3^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}}{\frac{22}{25}}$ donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}5^{-2k} = \frac{25}{66}\left(1 - \left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}\right)}.$$

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{3i}{j+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{3i}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{3i}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\frac{3}{j+1}\sum_{i=0}^{j} i = \sum_{j=0}^{n}\frac{3j(j+1)}{2(j+1)} = \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n} j = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{3i}{j+1} = \frac{3n(n+1)}{4}}$.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. Calculer u_2 et u_3. *On écrire les résultats sous forme de fraction irréductible.*

On a : $u_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
et $u_3 = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{2}{3}$

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^2} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^2}$ où l'on a effectué deux changements d'indice au numérateur.

On en déduit que $u_n = \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k \times \dfrac{n+1}{2}\prod_{k=2}^{n} k}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^2} = \dfrac{n+1}{2n} \times \dfrac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k \times k}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^2}$

donc $\boxed{u_n = \dfrac{n+1}{2n}}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n(1 + \frac{1}{n})}{2n} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2}$.
Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{5x}{x+1} - \dfrac{4x}{x-2} = 0$

Pour tous $x \neq -1$ et $x \neq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{5x}{x+1} - \frac{4x}{x-2} = 0 &\iff \frac{5x}{x+1} = \frac{4x}{x-2} \\
&\iff \frac{5x}{x+1} = \frac{4x}{x-2} \\
&\iff 5x(x-2) = 4x(x+1) \\
&\iff x[5(x-2) - 4(x+1)] = 0 \\
&\iff x(x-14) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = 14
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{0; 14\}}$.

2. $|3x+1| = |5x-8|$

On a :

$$\begin{aligned}
|3x+1| = |5x-8| &\iff 3x+1 = 5x-8 \text{ ou } 3x+1 = -5x+8 \\
&\iff 9 = 2x \text{ ou } 8x = 7 \\
&\iff x = \frac{9}{2} \text{ ou } \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{9}{2}; \frac{7}{8}\right\}}$.

3. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2+x-6}$

On raisonne par analyse-synthèse.
• **Analyse :** Soit x un réel pour lequel l'équation est bien définie.
En élevant cette équation au carré, on obtient $3x+2 = x^2+x-6$ d'où $x^2-2x-8=0$.
On a alors $\Delta = 4+32 = 36$.
Ce trinôme du second degré admet pour racines $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$ donc si x est solution de l'équation de départ, nécessairement $x=-2$ ou $x=4$.
• **Synthèse :** Vérifions si $x=-2$ et $x=4$ sont bien solutions de l'équation.
Si $x=-2$, on a $3x+2 = -6+2 = -4$ et $x^2-2x-8 = 4+4-8 = 0$ donc $x=-2$ n'est pas solution de l'équation (l'équation n'est d'ailleurs même pas définie pour $x=-2$).
Si $x=4$, on a bien $\sqrt{3x+2} = \sqrt{14}$ et $\sqrt{x^2+x-6} = \sqrt{16+4-6} = \sqrt{14}$ donc $x=4$ est solution de l'équation.
Ainsi, l'unique solution de l'équation est $x=4$.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$.

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

   (a) Montrer que $(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

   On a :

   $$\begin{aligned}(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 &= 4n+2-(n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1)\\ &= 2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\\ &= 2\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})+1\\ &= 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{n}^2-\sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{-2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

   On a bien $\boxed{(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$.

   (b) En déduire que $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

   Comme $(\sqrt{4n+2})^2 - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > 0$,
   on a alors $(\sqrt{4n+2})^2 > (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$.
   Donc, par la stricte croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$.
   Enfin, par croissance de la fonction partie entière, $\boxed{\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor}$.

2. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor < \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

   (a) Montrer alors que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

   Les nombres $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ étant entiers, $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor < \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ implique que $\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor + 1 \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.
   Or, pour tout réel x, $x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$.
   Donc, en particulier, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor + 1$.
   Par conséquent, $\boxed{\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor}$.

(b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$.

Par croissance de la fonction carrée, $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 \leqslant (\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2$.
Donc $n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1 \leqslant (\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2$
soit $2n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \leqslant (\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2$.
On remarque que $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ donc $2n+2\sqrt{n}\sqrt{n}+1 < 2n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1$
soit $4n+1 < 2n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1$ et donc $4n+1 < (\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2$.
Comme $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor \leqslant \sqrt{4n+2}$, on a $(\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2 \leqslant \sqrt{4n+2}^2 = 4n+2$.
Ainsi, $(\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor)^2 \in]4n+1;4n+2]$.
Or le seul entier de l'intervalle $]4n+1;4n+2]$ est $4n+2$.
On a ainsi $\boxed{\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2}$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que p^2 pair $\Longrightarrow p$ pair.

Montrons la contraposée : p impair $\Longrightarrow p^2$ impair. Soit $p \in \mathbb{N}$ impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$. On a alors $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ où $2k^2+2k \in \mathbb{N}$ donc p^2 est impair.
On en déduit que $\boxed{p^2 \text{ pair} \Longrightarrow p \text{ pair}}$.

(d) En déduire que l'égalité de la question 2. (b) est absurde.

Comme $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2 = 2(2n+1)$ avec $2n+1 \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$ est pair.
Donc d'après la question précédente, $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ est pair.
Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor = 2m$.
On a alors $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 4n+2$.
Donc $2m^2 = 2n+1$, ce qui est absurde (un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.
L'hypothèse « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ » est donc fausse.

(e) Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leqslant \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$
puis que l'inégalité $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ était impossible, on en déduit que $\boxed{\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor}$.

Problème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.

1. Enoncer la négation de la propriété $\mathscr{P}$.

On a : $\quad \neg\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2\right) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.

2. Donner un exemple de suite (non constante) ne vérifiant pas la propriété $\mathscr{P}$.

Il suffit de prendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$ et $u_k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. On alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} u_k^3 = 2^3 = 8 \neq \left(\sum_{k=1}^{1} u_k\right)^2 = 2^2 = 4$. La négation de $\mathscr{P}$ est donc vérifiée.

3. Déterminer les suites constantes vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = C$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = nC^3$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 = C^2n^2$.
$n \neq 0$ donc $C^3 = nC^2$ soit $C^2(C - n) = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cela implique que $C^2 = 0$ et donc $C = 0$.
La suite nulle est la seule suite constante qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

4. On cherche à savoir si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$, vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

   On a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$, et $\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$.
La formule est donc vérifiée au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, la formule soit vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$.
On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

C'est exactement la formule attendue au rang $n+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$

(c) Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^2$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc la propriété $\mathscr{P}$.

Problème 2

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est un point isolé de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}. \tag{$*$}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.

   On cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}$. Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors $\mathbb{N} \cap]\, n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\, [= \{n\}$ (car le seul entier de l'intervalle $]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$ est n).
   On a bien trouvé un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}$.
   Par conséquent, la propriété $(*)$ est vérifiée et donc n est un point isolé de $\mathbb{N}$.

2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$. En raisonnant comme à la question précédente, on a $\mathbb{Z} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[= \{n\}$ donc n est un point isolé de $\mathbb{Z}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel entier $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés, et donc qu'il n'existe pas de point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé.

3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.

   (b) On a : $\neg(\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}) \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\neq \{a\}$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.

   Pour montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que la propriété (*) n'est pas vérifiée, donc que sa négation est vérifiée, c'est-à-dire, d'après le résultat de la question précédente, que :

   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}.$$

   On commence donc par fixer un réel $\varepsilon > 0$. On a :
   $\dfrac{x + x + \varepsilon}{2} = x + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ car, comme $\varepsilon > 0$, on a $x - \varepsilon < x + \dfrac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon$.
   Donc $\mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}$.
   Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a bien montré que :

   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}.$$

   Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.

   Remarque : l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de réels.

4. (a) Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :

   $$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np + q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

(b) On a :

$$\left|r-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{np+q}{nq}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{np+q-np}{nq}\right|=\left|\frac{q}{nq}\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\quad\text{car } n \text{ est positif.}$$

Or $n \geqslant 2/\varepsilon > 0$ donc $\frac{1}{n} > 0$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. On en déduit bien que :

$$0 < \left|r-\frac{p}{q}\right| < \varepsilon.$$

(c) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

Puisque $\left|r-\frac{p}{q}\right| < \varepsilon$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit, d'après les propriétés de la valeur absolue, que $r \in]\frac{p}{q}-\varepsilon, \frac{p}{q}+\varepsilon[$. De plus, $r \in \mathbb{Q}$ et $r \neq \frac{p}{q}$ (car $\left|r-\frac{p}{q}\right| > 0$ d'après le résultat de la question précédente). Par conséquent, l'intervalle $]\frac{p}{q}-\varepsilon, \frac{p}{q}+\varepsilon[$ contient au moins deux rationnels différents : $\frac{p}{q}$ et r. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{Q} \cap \left]\frac{p}{q}-\varepsilon, \frac{p}{q}+\varepsilon\right[\neq \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\frac{p}{q}$ n'est pas un point isolé de $\mathbb{Q}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Q}$ ne sont pas isolés, et donc qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

5. (a) Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.

On a $[1,2] \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[= \emptyset$ donc $B \cap]0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}[= \{0\}$. Ainsi, on a trouvé un réel $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tel que $B \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[= \{0\}$. On en déduit que 0 est un point isolé de B. Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de B ne sont pas isolés. Soit x un autre point de B, donc $x \in [1,2]$. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble $[1,2] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de réels, donc $B \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}$. Puisque ceci est vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on en déduit que x n'est pas un point isolé de B. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in [1,2]$, on en déduit finalement que 0 est le seul point isolé de B.

(b) Soit $C = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. On a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc :

$$\frac{1}{n} \in]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[.$$

Autrement dit, $C \cap]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\neq \{0\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que 0 n'est pas un point isolé de C.

Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de C sont isolés. Soit $\frac{1}{n}$ un autre point de C, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On raisonne par analyse-synthèse.

• **Analyse :** On cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $C \cap \left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[= \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Puisque $\frac{1}{n+1}$ est l'élément de C qui précède $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

De même, puis que $\frac{1}{n-1}$ est l'élément de C qui suit $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n}$$

Il suffit donc que :

$$\varepsilon < \min\left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{car } n(n+1) > (n-1)n.$$

• **Synthèse :** On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2n(n+1)}$. D'après les calculs de l'analyse, on a :

$$C \cap \left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[= \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{n}$ est un point isolé de C. Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien montré que 0 est le seul point non isolé de C.

6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

Pour ne pas confondre la variable muette ε dans la propriété (*) et la variable muette ε dans la propriété (**), on utilise des notations différentes. Montrons que :

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\} \iff \exists \varepsilon_2 > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}.$$

On raisonne par double implication.
1^re^ implication $\Longleftarrow$.
On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$. On cherche $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. Or :

$$\{a\} \subset A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2\,[\subset A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}.$$

Donc $A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2\,[= \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

2^e^ implication $\Longrightarrow$. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. On cherche un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$.
Attention : contrairement à la première implication, il ne suffit pas de poser $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. En effet, si $a-\varepsilon_1 \in A$ ou si $a+\varepsilon_1 \in A$, on a $A \cap]\,a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$ mais $A \cap [a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1] \neq \{a\}$. Il faut donc choisir un ε_2 plus petit.

On a :

$$\{a\} \subset A \cap \left[a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}\right] \subset A \cap \left]\, a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right[= \{a\}.$$

Donc $A \cap \left[a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}\right] = \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Conclusion. Pour double implication, on a montré que les propriétés $(*)$ et $(**)$ sont équivalentes, et donc que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété $(**)$ est vérifiée.