Liste d'exercices n°6 — Trigonométrie

Exercice 1. Soient $(p,q)\in\mathbb{R}^2$. Montrer les formules suivantes :

1. $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
2. $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
4. $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi], b\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a),\cos(4a),\sin(3a),\sin(4a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\pi;\pi]$.

1. $\sin(x)=-\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$
2. $\sin(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\sin(3x)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
4. $\sin(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
5. $\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$
6. $\cos(x)=\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\tan(x)=\sqrt{3}$
2. $\sin(2x)=\sqrt{3}$
3. $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $2\cos(3x)=1$
5. $\tan(2x)=-1$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sin(x)<\pi$
2. $\sin(x)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan(x)>\sqrt{3}$
5. $\cos(x)\geq\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
6. $\sin(x)\geq\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\cos x+4\sin x$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Écrire $f(x)$ sous la forme $R\cos(x-\varphi)$ avec $R>0$ et $\varphi\in[0,2\pi[$.
2. En déduire les maxima et minima de f et les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.
3. Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation $3\cos x+4\sin x=2$.

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{3}$
2. $\sqrt{3}\cos(7x)-\sin(7x)=1$
3. $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos(x)$
4. $2\cos^2(x)=7\cos(x)-3$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} 2\sin(x)-4\cos(x) & = & \sqrt{3}+2 \\ \sin(x)+\sqrt{3}\cos(x) & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 9. Comment doit-on choisir w pour que l'équation suivante

$$1+\sin^2(wx)=\cos(x),$$

d'inconnue x réelle ait une unique solution ?

Exercice 10. Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$,

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2}=2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Exercice 11. Soit θ un réel tel que $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\theta\not\equiv\pi[2\pi]$.
On pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Montrer que

$$\cos(\theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin(\theta)=\frac{2t}{1+t^2}\quad \text{et}\quad \tan(\theta)=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

1. Etudier la parité et périodicité de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$.

Exercice 13. Résoudre l'équation $\cos^n(x)+\sin^n(x)=1$, où n est un entier strictement positif.

Exercice 14. Soient a,b,c,d des éléments de $[0,\pi]$.

1. Montrer que $\sin(a)+\sin(b)\leq 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
2. En déduire que $\sin(a)+\sin(b)+\sin(c)+\sin(d)\leq 4\sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$.
3. Montrer que $\sin(a)+\sin(b)+\sin(c)\leq 3\sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Exercice 15. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)\theta).$$

(Indication : calculer $2\sin(\theta)S$ et faire apparaître une somme télescopique.)

Exercice 16. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta).$$