Corrigé de la liste d'exercices n°6 Trigonométrie

Exercice 1

1.
$$\cos(p)+\cos(q)=\cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)+\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2.
$$\cos(p)-\cos(q)=\cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)-\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3.
$$\sin(p)+\sin(q)=\sin\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)+\sin\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

4.
$$\sin(p)-\sin(q)=\sin(p)+\sin(-q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Exercice 2

On a
$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}=\frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a)+\tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1-\tan(a)\tan(b))}$$
d'où $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
Pour $a=\dfrac{\pi}{3}$ et $b=-\dfrac{\pi}{4}$, on en déduit
$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\tan(\frac{\pi}{3})+\tan(-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(\frac{\pi}{3})\tan(-\frac{\pi}{4})}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

Exercice 3

$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(2a+a)\\ &= \cos(2a)\cos(a)-\sin(2a)\sin(a)\\ &= (2\cos^2(a)-1)\cos(a)-2\sin^2(a)\cos(a)\\ &= 2\cos^3(a)-\cos(a)-2(1-\cos^2(a))\cos(a)\\ &= 4\cos^3(a)-3\cos(a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(3a) &= \sin(2a+a)\\ &= \sin(2a)\cos(a)+\sin(a)\cos(2a)\\ &= 2\sin(a)\cos^2(a)+\sin(a)(1-2\sin^2(a))\\ &= 2\sin(a)(1-\sin^2(a))+\sin(a)-2\sin^3(a)\\ &= 2\sin(a)-2\sin^3(a)+\sin(a)-2\sin^3(a)\\ &= 3\sin(a)-4\sin^3(a).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\cos(4a) & = & \cos(2\times 2a)\\ & = & 2\cos^2(2a)-1\\ & = & 2(2\cos^2(a)-1)^2-1\\ & = & 8\cos^4(a)-8\cos^2(a)+1.\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\sin(4a) & = & \sin(2\times 2a)\\ & = & 2\sin(2a)\cos(2a)\\ & = & 2(2\sin(a)\cos(a))(1-2\sin^2(a))\\ & = & 4\sin(a)\cos(a)-8\sin^3(a)\cos(a).\end{array}$$

Exercice 4

1. $\sin(x) = -\sin(\frac{7\pi}{5}) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{7\pi}{5}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{7\pi}{5}[2\pi] \,\text{ou}\, x \equiv \pi - (-\frac{7\pi}{5})[2\pi]$ d'où $x \equiv \frac{3\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$.
   Les solutions sur $]-\pi,\pi]$ sont $\{\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\}$.
2. $\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \,\text{ou}\, 2x \equiv \pi - \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{12}[\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]$.
   Les solutions sur $]-\pi,\pi]$ sont $\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\}$.
3. $\sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{5}) \Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$ ou $3x \equiv \pi - \frac{\pi}{5}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{15}[\frac{2\pi}{3}]$ ou $x \equiv \frac{4\pi}{15}[\frac{2\pi}{3}]$.
   Les solutions sur $]-\pi,\pi]$ sont $\{-\frac{9\pi}{15}, -\frac{6\pi}{15}, \frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{11\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}\}$.
4. $\sin(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - (-\frac{\pi}{2})[2\pi]$ d'où $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   La seule solution sur $]-\pi,\pi]$ est $-\frac{\pi}{2}$.
5. $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}+x) \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}+x[2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3}-x[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{9}[\frac{2\pi}{3}]$.
   Les solutions sur $]-\pi,\pi]$ sont $\{-\frac{7\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}\}$.
6. $$\begin{array}{rcl}\cos(x) = \sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) & \Leftrightarrow & \cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2x}{3}\right)\\ & \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2x}{3}[2\pi] \,\text{ou}\, x \equiv -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2x}{3}[2\pi]\\ & \Leftrightarrow & \dfrac{5x}{3} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \,\text{ou}\, \dfrac{x}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\\ & \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{3\pi}{10}\left[\dfrac{6\pi}{5}\right] \,\text{ou}\, x \equiv -\dfrac{3\pi}{2}[6\pi].\end{array}$$
   Les solutions sur $]-\pi,\pi]$ sont $\{-\frac{9\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\}$.

Exercice 5

1. $\tan(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(x) = \tan(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.
2. $\sin(2x) = \sqrt{3}$ n'a pas de solution réelle car $\sqrt{3} > 1$.
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - (-\frac{\pi}{4})[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

4. $2\cos(3x) = 1 \Leftrightarrow \cos(3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $3x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc

$$x \equiv \frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

5. $\tan(2x) = -1 \Leftrightarrow \tan(2x) = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow 2x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6

1. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$.
3. $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$.
4. $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
5. $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$.
6. On a $\sin(x) \geqslant \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(x) \geqslant \sin(\frac{\pi}{6})$ donc $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$.

Exercice 7

1. Pour $f(x) = 3\cos x + 4\sin x$ on cherche $R > 0$ et φ tels que

$$3\cos x + 4\sin x = R\cos(x - \varphi) = R\cos x\cos\varphi + R\sin x\sin\varphi.$$

En identifiant les coefficients on obtient

$$R\cos\varphi = 3, \qquad R\sin\varphi = 4.$$

Donc $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et $\varphi = \arctan\frac{4}{3}$ (choisie dans $[0, \pi/2[$ ici). Ainsi

$$f(x) = 5\cos\big(x - \arctan(4/3)\big).$$

2. Les maxima sont $f(x) = 5$ atteints lorsque $\cos(x - \varphi) = 1$, soit

$$x = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les minima sont $f(x) = -5$ atteints lorsque $\cos(x - \varphi) = -1$, soit

$$x = \varphi + (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$3\cos x + 4\sin x = 5\cos(x - \varphi), \quad \varphi = \arctan(4/3).$$

L'équation devient $5\cos(x - \varphi) = 2$, donc $\cos(x - \varphi) = 2/5$. Dans $[0, 2\pi[$ on a

$$x - \varphi = \pm\arccos(2/5) + 2k\pi,$$

d'où

$$x = \varphi \pm \arccos(2/5) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour rester dans $[0, 2\pi[$ on prend les deux solutions principales

$$x_1 = \varphi + \arccos(2/5), \qquad x_2 = \varphi - \arccos(2/5) + 2\pi.$$

Exercice 8

1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x+\frac{\pi}{6}\equiv\pi-\frac{\pi}{3}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(7x)-\sin(7x)=1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(7x)-\frac{1}{2}\sin(7x)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(7x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(7x)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow 7x+\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 7x+\frac{\pi}{6}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow 7x\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 7x\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{42}\left[\frac{2\pi}{7}\right] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{\pi}{14}\left[\frac{2\pi}{7}\right].
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)=\cos(x)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x)=\cos(x)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(x)\\
&\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}\equiv x[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x+\frac{\pi}{3}\equiv -x[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

4. $2\cos^2(x)=7\cos(x)-3 \Leftrightarrow 2\cos^2(x)-7\cos(x)+3=0$.
   On pose $X=\cos(x)$.
   Le trinôme du second degré a pour discriminant

$$\Delta=(-7)^2-4\times(2)\times3=49-24=25>0$$

   donc les racines sont $X_1=\dfrac{7-5}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{7+5}{4}=3$.
   Ainsi, on a $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x)=3$. La deuxième option est impossible donc l'équation équivaut à $\cos(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

5. $\begin{cases} 2\sin(x) - 4\cos(x) &= \sqrt{3}+2 \\ \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}\cos(x) - 4\cos(x) &= \sqrt{3}+2 \\ \sin(x) &= -\sqrt{3}\cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \cos(x) &= -\dfrac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}} \\ \sin(x) &= -\sqrt{3}\cos(x) \end{cases}$.

Ainsi, $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{-2(2+\sqrt{3})} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 9

On a pour tout réel $x, \cos(x) \leqslant 1$ et $1+\sin^2(wx) \geqslant 1$ donc si $1+\sin^2(wx) = \cos(x)$, alors nécessairement $1+\sin^2(wx) = \cos(x) = 1$ donc $\sin(wx) = 0$ et $\cos(x) = 1$.
Ceci équivaut à $wx \equiv 0[\pi]$ et $x \equiv 0[2\pi]$. On voit que $x = 0$ est toujours solution de l'équation, sans aucune hypothèse sur w.
Supposons qu'il existe une autre solution x non nulle à l'équation.
Puisque $x \equiv 0[2\pi]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$, avec k non nul car x est non nul.
Par ailleurs, puisque $wx \equiv 0[\pi]$, on a $2k\pi w \equiv 0[\pi]$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi w = k'\pi$.
On peut diviser par k puisque k est non nul et on obtient $w = \dfrac{k'}{2k}$, ce qui implique que w est rationnel.
Ainsi, si l'équation admet plusieurs solutions, alors w est rationnel.
Réciproquement, supposons que $w = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, avec$(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}, x = 2\pi qk$ est solution car $x \equiv 0[2\pi]$ et $wx = 2\pi pk \equiv 0[\pi]$, ce qui fournit une infinité de solutions.
Finalement, l'équation admet une unique solution (qui sera $x = 0$) si et seulement si w est irrationnel.

Exercice 10

Montrons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
• **Initialisation :** pour $n = 2$, on a $2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Il y a bien $2-1 = 1$ chiffre 2 sous la racine, donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$.
•**Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons-la au rang $n+1$, i.e. montrons que $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
On a

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2}} = \sqrt{2+2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.
Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ donc $2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ d'où

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right|.$$

Or, $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$, ce qui assure que $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right| = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Finalement, on a bien $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Exercice 11

On a $\cos(\theta) = \dfrac{\cos(2\times\frac{\theta}{2})}{1} = \dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\dfrac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
De même, $\sin(\theta) = \dfrac{\sin(2\times\frac{\theta}{2})}{1} = \dfrac{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\dfrac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ d'où $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1. Pour tout réel x,

$$f(-x) = \sin^2\left(-\frac{\pi x}{2}\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = f(x).$$

   Donc f est paire.

$$f(x+2) = \sin^2\left(\frac{\pi(x+2)}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}+\pi\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = f(x).$$

   Donc f est 2-périodique.

2. $f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{2} \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ ou $\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   Soit $x \equiv \dfrac{1}{2}[4]$ ou $x = \dfrac{3}{2}[4]$ ou $x = -\dfrac{1}{2}[4]$ ou $x = -\dfrac{3}{2}[4]$.

Exercice 13

• Si $n = 1$, l'équation est $\cos(x)+\sin(x) = 1$.
On a

$$\cos(x)+\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui équivaut à

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\,\text{ou} x-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\,\text{ou}\, x \equiv 0[2\pi].$$

• Si $n = 2$, l'équation est $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ qui est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
• Supposons que $n > 2$. On remarque que $x \equiv 0[2\pi]$ et $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ sont toujours solutions de l'équation.
Il y a deux cas :
- Si n est pair, $x \equiv \pi[2\pi]$ et $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ sont solutions de l'équation.

- Si n est impair, $x \equiv \pi[2\pi]$ et $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ne sont pas solutions de l'équation.
Montrons maintenant que pour tout $n > 2$, si $x \not\equiv 0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors x n'est pas solution de l'équation.
En effet, dans ce cas, on a $0 < |\cos(x)| < 1$ et $0 < |\sin(x)| < 1$ donc puisque $n > 2$, on a

$$|\cos^n(x) + \sin^n(x)| \leqslant |\cos(x)|^n + |\sin(x)|^n < |\cos(x)|^2 + |\sin(x)|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Exercice 14

Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$.

1. D'après la formule montrée dans le premier exercice, on a

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Or, par hypothèse, $\frac{a+b}{2} \in [0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant 0$ et $\frac{a-b}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $0 \leqslant \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \leqslant 1$.

On en déduit que $0 \leqslant 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \leqslant 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$, ce qui prouve que $\sin(a) + \sin(b) \leqslant 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

2. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) &\leqslant 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{c+d}{2}\right) \\
&\leqslant 2\left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{c+d}{2}\right)\right) \\
&\leqslant 2\left(2\sin\left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}\right)\right) \quad \text{car } \frac{a+b}{2} \in [0, \pi] \text{ et } \frac{c+d}{2} \in [0, \pi] \\
&\leqslant 4\sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right).
\end{aligned}$$

3. En posant $d = \frac{a+b+c}{3}$, on a encore $d \in [0, \pi]$ donc d'après la question précédente,

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant 4\sin\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)$$

d'où

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant 4\sin\left(\frac{4a+4b+4c}{12}\right),$$

i.e.

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant 4\sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

donc finalement

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leqslant 3\sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Exercice 15

• Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!], (2k-1)\theta \equiv 0[2\pi]$ donc $\cos((2k-1)\theta) = 1$ d'où $S = n$.
• Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!], (2k-1)\theta \equiv \pi[2\pi]$ donc $\cos((2k-1)\theta) = -1$ d'où $S = -n$.
• Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ de telle sorte que $\sin(\theta) \neq 0$.
On a $2\sin(\theta)S = \sum_{k=1}^{n} 2\sin(\theta)\cos((2k-1)\theta) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{(2k\theta) - ((2k-2)\theta)}{2}\right)\cos\left(\frac{2k\theta + (2k-2)\theta}{2}\right)$.
En appliquant une formule du premier exercice, on obtient une somme télescopique :

$$2\sin(\theta)S = \sum_{k=1}^{n} \sin(2k\theta) - \sin(2(k-1)\theta) = \sin(2n\theta) - \sin(0) = \sin(2n\theta)$$

d'où $S = \dfrac{\sin(2n\theta)}{2\sin(\theta)}$.

Exercice 16

• Si $\theta \equiv 0[\pi]$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!], \cos^2(k\theta) = 1$ donc $S = n + 1$.
• Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ de telle sorte que $\sin(\theta) \neq 0$.
Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n, \cos^2(k\theta) = \dfrac{\cos(2k\theta) + 1}{2}$ donc

$$2\sin(\theta)S = \sum_{k=0}^{n} \sin(\theta)\cos(2k\theta) + (n+1)\sin(\theta).$$

D'après une formule du premier exercice, on a

$$\sin(\theta)\cos(2k\theta) = \frac{1}{2}(\sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta)$$

donc

$$2\sin(\theta)S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta)) + (n+1)\sin(\theta) = \frac{1}{2}(\sin(2n+1)\theta) - \sin(-\theta)) + (n+1)\sin(\theta)$$

d'où

$$S = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{4\sin(\theta)} + \frac{1}{4} + \frac{n+1}{2} = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{4\sin(\theta)} + \frac{2n+3}{4}.$$