Liste d'exercices n°7 — Nombres complexes

Exercice 1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants.

1. $(2-5i)(3+i)$
2. $\dfrac{3+2i}{i-1}$
3. $(1-i)^{32}$
4. $(2-i)^3$
5. $\dfrac{1}{1+i}$
6. $(12+5i)(3-i)$
7. $\dfrac{i-3}{i+2}$
8. $\dfrac{3+2i}{(1+i)(i-1)}$
9. $\dfrac{7+3i}{1-i}+2i$

Exercice 2. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.
Montrer que le milieu du segment $[MM']$ a pour affixe $\dfrac{z+z'}{2}$.

Exercice 3. Montrer que si $|z|=|z'|=1$ et si $1+zz'\neq 0$, alors le nombre $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z\in\mathbb{C}$ tels que

1. $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit réel ;
2. $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 5. Donner une écriture trigonométrique/exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $-3i$
2. $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $1-i\sqrt{3}$
4. $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)$
5. $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$
6. $3+i\sqrt{3}$
7. $1+i$
8. $(1-i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$
9. $(1-i)^7$
10. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{-1-i}{i}$
11. $-3\exp(4)$

Exercice 6. Soit α un réel. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^4$
2. $-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$
3. $\cos(-\alpha)+i\sin(\alpha)$
4. $-2i\cos(\alpha)+2\sin(\alpha)$
5. $\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)$
6. $1+i\tan(\alpha)$
7. $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$.

Exercice 7. Déterminer le module et un argument de $-\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Exercice 8. Soient $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Re}(z_i \overline{z_j}).$$

Exercice 9.

1. Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.
2. Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = -i$.
3. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $x^4 + 1$ en quatre facteurs de degré 1.
4. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $x^4 + 1$ en deux facteurs de degré 2.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $2z + \overline{z} = 2 + 3i$
3. $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$
4. $3\overline{z} + 3z - 2 + 3i = 0$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $5 + 2z^2 + 6z = 0$
2. $-z^2 - z + 6 = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $\dfrac{3z - 2}{z + 1} = -3z + 2$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $z^2 = 3 + 4i$
2. $z^2 = 8 - 6i$

Exercice 13. Soit $u \in]0; \pi[$. On considère l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$z^2 + 2\left[1 - \cos(u)\right] z + 2\left[1 - \cos(u)\right] = 0.$$
Trouver les solutions de cette équation et les mettre sous forme trigonométrique.

Exercice 14. Soit x un réel. Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^4(x)$
2. $\cos^4(x)\sin^2(x)$
3. $\sin^5(x)$

Exercice 15. Soit x un réel. Délinéariser les expressions suivantes.

1. $\cos(4x)$
2. $\sin(6x)$
3. $\cos(3x)$
4. $\sin(3x)$
5. $\cos(7x)$
6. $\sin(7x)$

Exercice 16. Pour x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on pose $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
Calculer $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
(Indication : penser à la formule de Moivre.)

Exercice 17. Soient n un entier naturel non nul et x un réel.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k}$ à l'aide de $(1 + i\sqrt{3})^n$.

Exercice 18.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 19. On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2, j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{2006} j^k$.

Exercice 20.
Soit p et q deux nombres réels.

1. Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.
2. En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et de $\sin(p) + \sin(q)$.
3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 21. Déterminer z tel que les points d'affixe z, z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$|z-1| = 2|z+1|.$$

Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.

Exercice 23. Soit $P(X) = X^2 + 2uX + v$ avec $u, v \in \mathbb{R}$. On suppose que P admet deux racines complexes conjuguées ζ et $\overline{\zeta}$ avec $\Im(\zeta) > 0$.

1. Exprimer u et v en fonction de ζ.
2. Donner une condition sur u, v pour que $|\zeta| = 1$.
3. Application : déterminer tous les polynômes $X^2 + 2uX + v$ à coefficients réels dont les deux racines ont module 1.

Exercice 24. Soient trois points non alignés A, B, C d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. On note $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

1. Justifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.