
DEVOIR MAISON N°4
A RENDRE POUR LE MERCREDI 5 NOVEMBRE 2025

Problème

Dans ce problème, on note ω le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On pourra remarquer que $\omega^3 = 1$. On définit la fonction $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ par

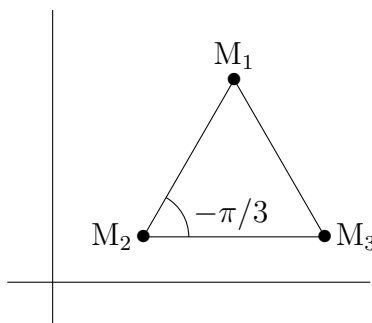
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3.$$

Partie A — Analyse complexe

- (a) Développer le produit $(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2)$ et en déduire que $f(1, 1, 1) = 0$.
(b) Calculer $f(1, \omega, \omega^2)$ et $f(1, \omega^2, \omega)$.
- (a) Donner le module et un argument du nombre complexe $-\omega$.
(b) Donner le module du nombre complexe $1 - \omega$.

Partie B — Triangles équilatéraux

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé direct et on identifie les points du plan à leur affixe complexe. Étant donnés trois points M_1 , M_2 et M_3 deux à deux distincts, on dit que le triangle $M_1M_2M_3$ est **équilatéral direct** lorsque $M_2M_1 = M_2M_3$ et la mesure de l'angle orienté $\widehat{M_1M_2M_3}$ vaut $-\pi/3$. La figure suivante montre un exemple de triangle équilatéral direct.



Soient M_1, M_2 et M_3 trois points deux à deux distincts, et z_1, z_2 et z_3 leurs affixes respectives.

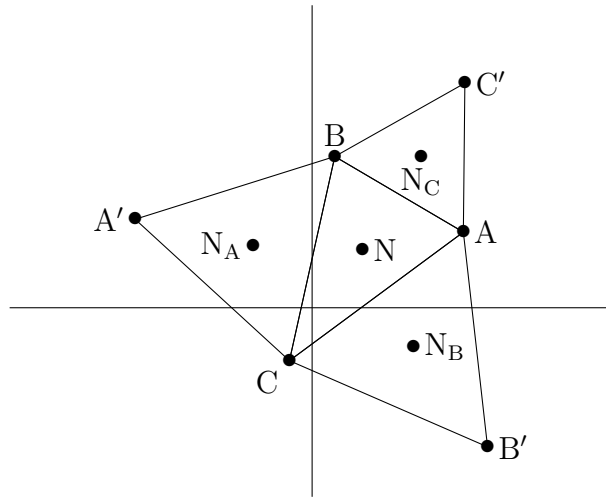
- Montrer que $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$
- En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $f(z_1, z_2, z_3) = 0$.

Partie C — Un résultat géométrique

On donne la définition suivante : étant donné un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ du plan complexe, dont les sommets M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes z_1, z_2 et z_3 , on appelle **centre de gravité** de $M_1M_2M_3$ le point d'affixe

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Pour la suite du problème, on place dans la configuration suivante. On fixe trois points A, B et C deux à deux distincts du plan complexe. On construit les points A', B' et C' tels que les triangles $A'CB, B'AC$ et $C'BA$ sont équilatéraux directs. On appelle N, N_A, N_B, N_C les centres de gravité des triangles $ABC, A'CB, B'AC$ et $C'BA$. On notera $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', z_N, z_{N_A}, z_{N_B}$ et z_{N_C} , les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', N, N_A, N_B$ et N_C .



1. Exprimer α', β' et γ' en fonction de α, β, γ et ω .

2. On pose $\delta = \alpha + \omega\beta + \omega^2\beta$.

(a) Montrer que $z_{N_B} - z_N = -\frac{\omega\delta}{3}$.

(b) Exprimer de même $z_{N_C} - z_N$ et $z_{N_A} - z_N$ en fonction de ω et δ .

(c) Exprimer la longueur $N_A N_B$ en fonction de $|\delta|$.