

Corrigé de la liste d'exercices n°7

Nombres complexes

Exercice 1

1. $(2 - 5i)(3 + i) = 6 + 2i - 15i + 5 = 11 - 13i.$

2. $\frac{3 + 2i}{i - 1} = \frac{(3 + 2i)(-1 - i)}{(i - 1)(-i - 1)} = \frac{-1 - 5i}{2}.$

3. On a $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Donc

$$(1 - i)^{32} = ((1 - i)^2)^{16} = (-2i)^{16} = (-2)^{16} i^{16} = 2^{16} (i^4)^4 = 2^{16}.$$

4. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(2 - i)^3 = 2^3 - 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i.$$

5. $\frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2}.$

6. $(12 + 5i)(3 - i) = 41 + 3i.$

7. $\frac{i - 3}{i + 2} = \frac{(-3 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i.$

8. $\frac{3 + 2i}{(1 + i)(i - 1)} = \frac{3 + 2i}{-2} = \frac{-3 - 2i}{2} = -\frac{3}{2} - i.$

9. $\frac{7 + 3i}{1 - i} + 2i = \frac{(7 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} + 2i = \frac{4 + 10i}{2} + 2i = 2 + 7i.$

Exercice 2

Soient $M(a, b)$ et $M(a', b')$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On a donc $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Soit $I\left(\frac{a + a'}{2}, \frac{b + b'}{2}\right)$ le milieu du segment $[MM']$.

Son affixe est alors $z'' = \frac{a + a'}{2} + i\frac{b + b'}{2} = \frac{z + z'}{2}.$

Exercice 3

Soit $Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$. On a

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z + z'}{1 + zz'}\right)} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z}\overline{z'}}.$$

Or, $|z| = |z'| = 1$ donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$ d'où

$$\overline{Z} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{z}\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z + z'}{zz'}}{\frac{zz' + 1}{zz'}} = \frac{z + z'}{1 + zz'} = Z$$

donc Z est réel.

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \\ &\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}-1) = (z-1)(\bar{z}+1) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - z + \bar{z} - 1 = |z|^2 + z - \bar{z} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2z = 2\bar{z} \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = -\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = -\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \\ &\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}-1) = (1-z)(\bar{z}+1) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - z + \bar{z} - 1 = \bar{z} + 1 - |z|^2 - z \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow |z| = 1\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \setminus \{1\}$.

Exercice 5

1. $-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

2. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j.$

3. $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

4. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}} 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}.$

5. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^4 = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$

6. $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$

7. $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$

8. $(1-i)(-1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}.$
9. $(1-i)^7 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7 = \sqrt{2}^7 e^{-\frac{7i\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$
10. $\frac{\sqrt{2}-1-i}{2} \frac{1}{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$
11. $-3\exp(4) = 3\exp(4)e^{i\pi}.$

Exercice 6

1. $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^4 = (e^{i\alpha})^4 = e^{4i\alpha}.$
2. $-\cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi) = e^{i(\alpha+\pi)}.$
3. $\cos(-\alpha) + i\sin(\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}.$
4. $-2i\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha) = -2i(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = 2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}.$
5. $\sin(\alpha) + i\cos(\alpha) = i(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) = i(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}.$
6. Soit $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$

$$1 + i\tan(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}.$$

- Si $\cos(\alpha) > 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1 + i\tan(\alpha)$ est $\frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}.$
 - Si $\cos(\alpha) < 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1 + i\tan(\alpha)$ est $-\frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i(\alpha+\pi)}.$
7. En utilisant la technique de l'angle moitié, on trouve

$$1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = 1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

- Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, alors $1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = 0.$
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\alpha}{2} \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\Leftrightarrow \alpha \in]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ est $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}.$
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\alpha}{2} \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[\Leftrightarrow \alpha \in]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ est $-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)}.$

Exercice 7

Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

On a $z^2 = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} - 2i.$

On a $|z|^2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$, d'où $z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

Ainsi, $z = \pm 2e^{-i\frac{\pi}{12}}.$ Puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\operatorname{Re}(z) < 0$, on en déduit que

$$z = -2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

Exercice 8

On a

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \overline{z_j} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} \\
 &= \sum_{k=1}^n z_k \overline{z_k} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i \overline{z_j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} z_i \overline{z_j} \\
 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i \overline{z_j} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_j \overline{z_i} \\
 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i \overline{z_j} + \overline{z_i} z_j \\
 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i \overline{z_j} + \overline{z_i z_j} \\
 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Re}(z_i \overline{z_j}).
 \end{aligned}$$

Exercice 9

1. On a $z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
2. On a $z^2 = -i \Leftrightarrow z^2 = e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ ou $z = -e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$.
3. Sur $\mathbb{C}$, on a $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x^2 = i$ ou $x^2 = -i$ d'où

$$x^4 + 1 = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{\frac{5i\pi}{4}})(x - e^{\frac{3i\pi}{4}})(x - e^{\frac{7i\pi}{4}}).$$

4. Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$, on multiplie entre eux les termes conjugués deux à deux. En effet, on a $\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$ et $\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ d'où

$$\begin{aligned}
 x^4 + 1 &= (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}})(x - e^{\frac{3i\pi}{4}})(x - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}) \\
 &= (x^2 - (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})x + 1)((x^2 - (e^{\frac{3i\pi}{4}} + e^{-\frac{3i\pi}{4}})x + 1)) \\
 &= (x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + 1)(x^2 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)x + 1) \\
 &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).
 \end{aligned}$$

Exercice 10

1. $z + 2i = iz - 1 \Leftrightarrow z(1 - i) = -1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{(-1 - 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \Leftrightarrow z = \frac{1 - 3i}{2}$.
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + ib$.

Alors

$$2z + \bar{z} = 2 + 3i \Leftrightarrow 2(a + ib) + a - ib = 2 + 3i \Leftrightarrow 3a + ib = 2 + 3i.$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} 3a &= 2 \\ b &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{2}{3} \\ b &= 3 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $z = \frac{2}{3} + 3i$.

$$3. (4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z \Leftrightarrow z((4 - 2i)z - (1 + 5i)) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{(1 + 5i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{-6 + 22i}{20} = \frac{-3 + 11i}{10}.$$

$$4. 3\bar{z} + 3z - 2 + 3i = 0 \Leftrightarrow 3(z + \bar{z}) = 2 - 3i \Leftrightarrow 6\operatorname{Re}(z) = 2 - 3i, \text{ ce qui est absurde car } 2 - 3i \notin \mathbb{R} \text{ donc cette équation n'admet pas de solution.}$$

Exercice 11

$$1. \Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4 < 0 \text{ donc les racines de ce trinôme sont}$$

$$z_1 = \frac{-6 + 2i}{4} = \frac{-3 + i}{2} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-3 - i}{2}.$$

$$2. \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 > 0 \text{ donc les racines sont}$$

$$z_1 = \frac{1 - 5}{-2} = 2 \text{ et } z_2 = \frac{1 + 5}{-2} = -3.$$

$$3. \text{ On a vu en cours que les racines de } z^2 + z + 1 = 0 \text{ sont } j = e^{2i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \bar{j} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}.$$

$$4. \text{ Cette équation est bien définie pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}. \text{ On a les équivalences}$$

$$\frac{3z - 2}{z + 1} = -3z + 2 \Leftrightarrow 3z - 2 = (z + 1)(-3z + 2) \Leftrightarrow (3z - 2)(1 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow (3z - 2)(z + 2) = 0$$

donc les racines sont

$$z_1 = -2 \text{ et } z_2 = \frac{2}{3}.$$

Exercice 12

$$1. \bullet \text{ 1ère méthode : On cherche } z \text{ sous la forme } z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors $z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$ d'où par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4. \end{cases}$$

$$\text{Par ailleurs, } z^2 = 3 + 4i \Rightarrow |z^2| = |3 + 4i| \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5.$$

$$\text{Ainsi, } 2x^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = 3 + 5 = 8 \text{ d'où } x^2 = 4 \text{ i.e. } x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

$$\text{Si } x = 2, \text{ puisque } 2xy = 4, \text{ on a } 4y = 4 \text{ d'où } y = 1, \text{ ce qui fournit la solution } z = 2 + i.$$

$$\text{Si } x = -2, \text{ puisque } 2xy = 4, \text{ on a } -4y = 4 \text{ d'où } y = -1, \text{ ce qui fournit la solution } z = -2 - i.$$

$$\text{Réciproquement, on vérifie qu'on a bien } (2 + i)^2 = (-2 - i)^2 = 3 + 4i.$$

$$\bullet \text{ 2ème méthode : On a } |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ donc } 3 + 4i = 5 \left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \right) = 5e^{i \arccos(\frac{3}{5})}.$$

$$\text{Les solutions de l'équation } z^2 = 3 + 4i \text{ sont donc } z = \sqrt{5}e^{\frac{i \arccos(\frac{3}{5})}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{5}e^{\frac{i \arccos(\frac{3}{5})}{2}}.$$

2. • 1ère méthode : On cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors $z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i$ d'où par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 8 \\ 2xy &= -6. \end{cases}$$

Par ailleurs, $z^2 = 8 - 6i \Rightarrow |z^2| = |8 - 6i| \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$.

Ainsi, $2x^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = 8 + 10 = 18$ d'où $x^2 = 9$ i.e. $x = 3$ ou $x = -3$.

Si $x = 3$, puisque $2xy = -6$, on a $6y = -6$ d'où $y = -1$, ce qui fournit la solution $z = 3 - i$.

Si $x = -3$, puisque $2xy = -6$, on a $-6y = -6$ d'où $y = 1$, ce qui fournit la solution $z = -3 + i$.

Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $(-3 + i)^2 = (3 - i)^2 = 8 - 6i$.

• 2ème méthode : On a $|8 - 6i| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$ donc $8 - 6i = 10 \left(\frac{4}{5} - \frac{3i}{5} \right) = 10e^{-i \arccos(\frac{4}{5})}$.

Les solutions de l'équation $z^2 = 8 - 6i$ sont donc $z = \sqrt{10}e^{-\frac{i \arccos(\frac{4}{5})}{2}}$ ou $z = -\sqrt{10}e^{-\frac{i \arccos(\frac{4}{5})}{2}}$.

Exercice 13

Soit $u \in]0, \pi[$. Calculons le discriminant de ce trinôme du second degré :

$$\Delta = 4(1 - \cos(u))^2 - 4 \times 2(1 - \cos(u)) = 4(1 - 2\cos(u) + \cos^2(u)) - 8 + 8\cos(u) = 4(\cos^2(u) - 1) = -4\sin^2(u) < 0$$

car $\sin(u) > 0$ puisque $u \in]0, \pi[$.

Ainsi, $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4\sin^2(u)} = 2|\sin(u)| = 2\sin(u)$ car $u \in]0, \pi[$.

On a donc deux racines complexes conjuguées que sont

$$z_1 = \frac{-2(1 - \cos(u)) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-2 + 2\cos(u) - 2i\sin(u)}{2} = \cos(u) - 1 - i\sin(u) \text{ et } z_2 = \cos(u) - 1 + i\sin(u).$$

On a $z_2 = -1 + \cos(u) + i\sin(u) = e^{iu} - 1 = e^{i\frac{u}{2}}(e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}) = 2i\sin(\frac{u}{2})e^{i\frac{u}{2}} = 2\sin(\frac{u}{2})e^{i(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})}$.

Ainsi, $|z_2| = 2|\sin(\frac{u}{2})|$. Puisque $u \in]0, \pi[$, alors $\frac{u}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $2\sin(\frac{u}{2}) > 0$ donc $|z_2| = 2\sin(\frac{u}{2})$.

L'écriture exponentielle de z_2 est donc $z_2 = 2\sin(\frac{u}{2})e^{i(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})}$ et celle de z_1 est $z_1 = 2\sin(\frac{u}{2})e^{-i(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})}$.

Exercice 14

1. D'après les fomules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) \\ &= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

2. D'après les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
 \cos^4(x) \sin^2(x) &= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\
 &= -\frac{1}{64}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\
 &= -\frac{1}{64}(e^{6ix} + e^{-6ix} + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 4) \\
 &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) + 4\cos(4x) - 2\cos(2x) - 4) \\
 &= -\frac{\cos(6x)}{32} - \frac{\cos(4x)}{16} + \frac{\cos(2x)}{32} + \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

3. D'après les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
 \sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\
 &= \frac{1}{32i}(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
 &= \frac{1}{32i}(2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin(x)) \\
 &= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).
 \end{aligned}$$

Exercice 15

1. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \cos(4x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^4) \\
 &= \operatorname{Re}(\cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x)) \\
 &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x).
 \end{aligned}$$

2. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \sin(6x) &= \operatorname{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^6) \\
 &= 6\cos^5(x)\sin(x) - 20\cos^3(x)\sin^3(x) + 6\cos(x)\sin^5(x).
 \end{aligned}$$

3. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \cos(3x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^3) \\
 &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x).
 \end{aligned}$$

4. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \sin(3x) &= \operatorname{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^3) \\
 &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).
 \end{aligned}$$

5. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \cos(7x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^7) \\
 &= \cos^7(x) - 21\cos^5(x)\sin^2(x) + 35\cos^3(x)\sin^4(x) - 7\cos(x)\sin^6(x).
 \end{aligned}$$

6. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
 \sin(7x) &= \operatorname{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^7) \\
 &= 7\cos^6(x)\sin(x) - 35\cos^4(x)\sin^3(x) + 21\cos^2(x)\sin^5(x) - \sin^7(x).
 \end{aligned}$$

Exercice 16

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sin(kx) \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k.$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

• Si $x \equiv 0[2\pi]$, alors $e^{ix} = 1$ donc $\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = n+1$ d'où par identification, $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.

• Supposons dorénavant que $x \not\equiv 0[2\pi]$. On a alors $e^{ix} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} (e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{2i \sin(\frac{n+1}{2}x)}{2i \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on en déduit

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 17

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Im}(e^{ikx}) \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k 1^{n-k} \right) \\ &= \operatorname{Im}(1 + e^{ix})^n. \end{aligned}$$

Or, $1 + e^{ix} = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$ d'après la dernière question de l'exercice 6 donc

$$(1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}} \right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sqrt{3}^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} i^{2k} \sqrt{3}^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} \sqrt{3}^{2k+1} \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k 3^k + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sqrt{3}^{2k+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k 3^k = \operatorname{Re}((1 + i\sqrt{3})^n)$.

D'autre part, on a $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, $\operatorname{Re}((1 + i\sqrt{3})^n) = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

On en conclut que

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-3)^k = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 18

1. Calcul fait dans le poly : $\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$.
2. On applique la formule de la question précédente pour $x = \frac{\pi}{10}$. On obtient

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) &= 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) (16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5) \\ \Leftrightarrow 0 &= 16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \quad \text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $16x^2 - 20x + 5$ de discriminant

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16 \times 5 = 80 = (4\sqrt{5})^2.$$

On a donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{20 - 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}$ ou $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$. Or, $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$ donc par décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ puis en utilisant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, on en conclut que

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 19

On remarque que

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2i\pi/3}.$$

1. Pour tout entier n , $j^n = e^{2in\pi/3}$. En particulier :

$$j^2 = e^{4i\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

Par périodicité on obtient pour $m \in \mathbb{N}$:

$$j^{3m} = 1, \quad j^{3m+1} = j, \quad j^{3m+2} = j^2.$$

2. On utilise la formule de la somme des suites géométriques ou la somme des racines cubiques de l'unité :

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = \sum_{k=0}^2 e^{2ik\pi/3} = 0.$$

(Cela tient au fait que les trois racines cubiques de l'unité ont pour somme 0.)

3. La somme géométrique vaut

$$S = \sum_{k=0}^{2006} j^k = \frac{1 - j^{2007}}{1 - j}, \quad (j \neq 1).$$

Comme $j^3 = 1$ et $2007 = 3 \times 669$, on a $j^{2007} = 1$, donc $S = 0$.

Exercice 20

1. On écrit

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}.$$

2. En prenant parties réelle et imaginaire :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

Ces formules sont les classiques sommes en produits.

3. Pour $p = x$ et $q = 3x$ on obtient

$$\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x.$$

L'équation $2 \cos 2x \cos x = 0$ donne les solutions

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$ on retient :

$$x \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Exercice 21

Soit $z \in \mathbb{C}$. Trois points d'affixes z , z^2 , z^4 sont alignés si et seulement si le quotient

$$\frac{z^2 - z}{z^4 - z} \in \mathbb{R} \quad (\text{pour } z \notin \{0, 1\}).$$

Posons $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Une condition équivalente pratique est l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$z^2 - z = \lambda(z^4 - z).$$

Si $z \in \{0, 1\}$ on a évidemment alignement (cas dégénérés). Sinon, en simplifiant par $z^2 - z$ si nécessaire, on obtient

$$1 = \lambda(z^2 + z + 1),$$

ce qui impose que $z^2 + z + 1$ soit réel non nul. En écrivant $z = x + iy$ on calcule

$$z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y).$$

La partie imaginaire s'annule si et seulement si $y(2x + 1) = 0$. Donc deux familles :

- $y = 0 : z$ réel. Dans ce cas les points sont réels (ou coïncidents) et donc alignés ; on vérifie que tout $z > 0$ fonctionne (revient à l'argument précédent).
- $2x + 1 = 0 : x = -\frac{1}{2}$, i.e. $z = -\frac{1}{2} + iy$. Pour ces z la quantité $z^2 + z + 1$ est réelle, ce qui permet l'existence d'un λ réel satisfaisant l'égalité précédente sauf éventuellement si $z^2 + z + 1 = 0$ (cas à étudier séparément : alors z est une racine primitive d'ordre 3 et on retrouve des coïncidences de points).

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par l'union

$$\{0, 1\} \cup \{z \in \mathbb{R}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = -\frac{1}{2}\},$$

à interpréter en tenant compte des cas dégénérés où des points coïncident. Cette description peut se raffiner, mais elle donne les familles naturelles de solutions.

Exercice 22

Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Élevons au carré :

$$(x-1)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2).$$

Développons :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4(x^2 + 2x + 1 + y^2). \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2. \end{aligned}$$

Regroupons tout d'un côté :

$$0 = 3x^2 + 10x + 3 + 3y^2.$$

Divisons par 3 :

$$x^2 + \frac{10}{3}x + 1 + y^2 = 0.$$

Complétons le carré pour x :

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 + y^2 = 0$$

soit

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}.$$

C'est un cercle de centre $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

Exercice 23

1. On sait que $\zeta + \bar{\zeta} = -2u$ (somme des racines) et $\zeta\bar{\zeta} = v$ (produit). Comme $\bar{\zeta}$ est le conjugué, $\zeta + \bar{\zeta} = 2\Re(\zeta)$ donc $u = -\Re(\zeta)$ et $v = |\zeta|^2$.
2. Si $|\zeta| = 1$ alors $v = 1$.
3. Donc les polynômes sont de la forme $X^2 + 2uX + 1$ avec $u \in \mathbb{R}$. Les racines sont $\zeta = -u \pm i\sqrt{1-u^2}$; pour qu'elles soient complexes conjuguées non réelles il faut $|u| < 1$.

Exercice 24

1. Par définition, $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Donc $j^3 = \exp(2i\pi) = 1$. De plus, on sait que

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

2. Le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

En termes de nombres complexes, ceci se caractérise par

$$\frac{c-a}{b-a} = \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = -j^2 \iff c-a+j^2b-j^2a=0.$$

Or $1+j^2=-j$, donc $c+ja+j^2b=0$. En multipliant par j^2 , on obtient bien :

$$a+bj+cj^2=0.$$

Ainsi,

$$\frac{c-a}{b-a} = \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) \iff a+bj+cj^2=0$$

ce qui correspond bien au résultat voulu.