Liste d'exercices n°8 — Fonctions réelles usuelles

Exercice 0. Soit $f : x \longmapsto x^2$.
Tracer les graphes des applications $x \mapsto f(x)+2, x \mapsto f(2-x), x \mapsto f(2x)$ et $x \mapsto 2f(x)$.

Exercice 1. Etudier la parité de la fonction $f : x \longmapsto (1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si la fonction f est paire, alors la fonction f' est impaire.
2. Montrer que si la fonction f est impaire, alors la fonction f' est paire.
3. Montrer que si la fonction f est périodique, alors la fonction f' est périodique aussi.

Exercice 3. Déterminer si les fonctions suivantes sont majorées, minorées, bornées sur E. Admettent-elles un maximum, un minimum, une borne supérieure, une borne inférieure ?

1. $E=\mathbb{R}$ et $f(x) = -x^2+\pi$;
2. $E=\mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{2-\sin(x)}$;
3. $E=\mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$;
4. $E=\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Exercice 4. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto 3x\cos(x) - 5^x$
2. $x \longmapsto e^x + \dfrac{x}{(\tan(x+1))^7}$
3. $x \longmapsto \sqrt{x^7\cos(x)}$
4. $x \longmapsto \ln\left(\sqrt{3x^2-5}\right)$
5. $x \longmapsto |x^2-4|$
6. $x \longmapsto e^x\ln(\sin(x))$
7. $x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
8. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$
9. $x \longmapsto |\sin(x)|$
10. $x \longmapsto \ln\left(|x^2-5x+6|\right)$

Exercice 5. Etudier les fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto x^x$
2. $g : x \longmapsto x+\sin^2(x)$
3. $h : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 6. Mener une étude complète des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
2. $g : t \longmapsto \dfrac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 9. Montrer que pour tout élément x de $[1;+\infty[$, on a :

$$(x-2)\sqrt{x-1} \geqslant -\frac{2}{3^{3/2}}.$$

Exercice 10.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{x^3} = (x^x)^3$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) - \ln(x-1) \geqslant 1$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Etudier les variations de f.
4. Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 12. Montrer que pour tout élément x de $]0;1[$, on a :

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 13. Soit x un réel strictement positif. Posons $a = \exp(x^2)$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$. Simplifier a^b.

Exercice 14.

1. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
2. En déduire qu'il existe deux nombres réels positifs irrationnels a et b tels que a^b est un nombre rationnel.

Exercice 15. On considère les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperboliques définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle réelle.
2. (a) Justifier que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées. En déduire que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction ch et calculer ses limites.
3. (a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque argsh définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
   (c) Montrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
4. (a) Soit $y \in [1,+\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$, de bijection réciproque argch définie pour tout $x \in [1,+\infty[$ par $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   (c) Montrer que argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$, $\mathrm{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.