BCPST1
A. Wassfi

Corrigé du devoir maison n°3
A rendre pour le mercredi 5 novembre 2025

Exercice 1

Un anagramme est un mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot (sans rien ajouter ni enlever). Le mot formé peut avoir du sens ou pas.

1. Combien d'anagrammes du mot OCCURRENCE peut-on former ?

OCCURRENCE est un mot de 10 lettres. Or le nombre de permutations d'un objet de 10 éléments est 10!.
Mais le mot OCCURRENCE contient plusieurs fois plusieurs lettres. Pour chacune d'elles, il faut diviser par le nombre de permutations possibles qu'elle engendre. On obtient alors le nombre d'anagrammes du mot OCCURRENCE :

$$N_{\text{total}} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151\,200$$

2. Combien d'anagrammes du mot OCCURRENCE se terminant par une voyelle peut-on former ?

Les voyelles du mot sont : O, U, E, E.

Cas 1 : la dernière lettre est le O
Les lettres restantes sont $C, C, C, U, R, R, E, E, N$ et le nombre d'anagrammes est :

$$N_1 = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{362\,880}{24} = 15\,120$$

Cas 2 : la dernière lettre est le U
Les lettres restantes sont $O, C, C, C, R, R, E, E, N$ et le nombre d'anagrammes est (même calcul) :

$$N_2 = 15\,120$$

Cas 2 : la dernière lettre est le E
Une des lettres E est à la fin, donc les lettres restantes sont : $O, C, C, C, U, R, R, E, N$

$$N_3 = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{362\,880}{12} = 30\,240$$

Le nombre d'anagrammes se terminant par une voyelle est donc

$$15\,120 + 15\,120 + 30\,240 = \boxed{60\,480}$$

Autre méthode : 4 lettres sur 10 sont des voyelles donc le nombre d'anagrammes qui se terminent par une voyelle est :

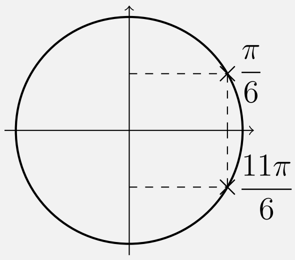
$$N_{\text{fin voyelle}} = N_{\text{total}} \times \frac{1+1+2}{10} = 151\,200 \times \frac{4}{10} = 60\,480$$

Exercice 2

Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ où $x \in [0; 2\pi]$;

$$\begin{cases} \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases}$$



On a donc $\boxed{S = \left]\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right[}$.

2. $\sin(4x+1) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ où $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} \sin(4x+1) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &\iff 4x+1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x+1 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ où } k,k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff 4x = \frac{\pi}{3} - 1 + 2k\pi \text{ ou } 4x = \frac{2\pi}{3} - 1 + 2k'\pi \text{ où } k,k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} + \frac{k'\pi}{2} \text{ où } k,k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{k'\pi}{2} \text{ où } k,k' \in \mathbb{Z}\right\}}$.

3. $\sin^2 x - \dfrac{3}{2}\sin x - 1 = 0$ où $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Posons $X = \sin x$.
$\sin^2 x - \dfrac{3}{2}\sin x - 1 = 0 \iff X^2 - \dfrac{3}{2}X - 1 = 0$.
$\Delta = (-\frac{3}{2})^2 + 4 = \dfrac{25}{4}$ donc $X_1 = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2}$ soit $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 2$.
L'équation $\sin x = 2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
L'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ se résout de la manière suivante :
$\sin x = -\dfrac{1}{2} \iff x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$.
Les solutions dans $[-\pi; 2\pi]$ sont :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}}$$

Exercice 3

Soit $\theta = \mathrm{e}^{i2\pi/5}$. On définit alors $X = \theta + \theta^4$ et $Y = \theta^2 + \theta^3$.

1. Montrer que $\theta^5 = 1$. En déduire que $1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 = 0$.

   On a $\theta^5 = (\mathrm{e}^{i2\pi/5})^5 = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1$.
   On en déduit que $1 - \theta^5 = 0$ donc, comme $\theta \neq 1$, on a :
   $$1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 = \sum_{k=0}^{4} \theta^k = \frac{1-\theta^5}{1-\theta} = 0$$

2. Montrer que les nombres complexes X et Y sont solutions de l'équation $(E) : x^2+x-1 = 0$.
   On ne cherchera pas à calculer directement X et Y mais plutôt à exprimer $X^2 + X - 1$ et $Y^2 + Y - 1$ en fonction de θ pour utiliser ensuite les résultats de la question précédente.

   $X^2+X-1 = \theta^2+2\theta\theta^4+\theta^8+\theta+\theta^4-1 = \theta^2+2+\theta^3+\theta+\theta^4-1 = 1+\theta+\theta^2+\theta^3+\theta^4 = 0$.
   $Y^2+Y-1 = \theta^4+2\theta^2\theta^3+\theta^6+\theta^2+\theta^3-1 = \theta^4+2+\theta+\theta^2+\theta^3-1 = 1+\theta+\theta^2+\theta^3+\theta^4 = 0$.
   Donc X et Y sont bien solutions de l'équation $(E) : x^2 + x - 1 = 0$.

3. Grâce aux formules d'Euler, prouver que $X = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $Y = 2\cos(\frac{4\pi}{5})$.

   $X = \theta + \theta^4 = \mathrm{e}^{i2\pi/5} + \mathrm{e}^{i8\pi/5} = \mathrm{e}^{i2\pi/5} + \mathrm{e}^{-i2\pi/5} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$
   $Y = \theta^2 + \theta^3 = \mathrm{e}^{i4\pi/5} + \mathrm{e}^{i6\pi/5} = \mathrm{e}^{i4\pi/5} + \mathrm{e}^{-i4\pi/5} = 2\cos(\frac{4\pi}{5})$

4. Résoudre l'équation (E) puis en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

   $\Delta = 1^2 + 4 = 5$ donc $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   donc, comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ et comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) < 0$, on obtient : $\boxed{\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}}$.

5. Déterminer enfin les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et $\cos(\frac{3\pi}{5})$.

   $\cos(\frac{\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{4\pi}{5}) = -\cos(\frac{4\pi}{5}) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$
   $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos(\frac{2\pi}{5}) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$
   On a ainsi $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\boxed{\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$.

6. Quelle est la valeur exacte de $\cos(\frac{348\pi}{5})$?

   $\cos(\frac{348\pi}{5}) = \cos(\frac{350\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}) = \cos(35 \times 2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \cos(-\frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5})$
   si bien que $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.