

---

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°2  
Samedi 8 novembre 2025 (3h)

---

L'énoncé est constitué de quatre exercices, deux problèmes et comporte 4 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

**Les résultats doivent être encadrés.**

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

**Les calculatrices sont interdites.**

## Exercice 1 : Au Scrabble

On dispose de dix jetons de Scrabble portant les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I et J avec lesquels on écrit des mots<sup>1</sup> de dix lettres en utilisant une et une seule fois chaque jeton.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons ?
2. Dans combien de mots les lettres J, G et B apparaissent-elles :
  - (a) dans cet ordre et côte à côte ?
  - (b) côte à côte, mais pas nécessairement dans cet ordre ?
  - (c) dans cet ordre, mais pas nécessairement côte à côte ?

*Vous exprimerez vos résultats à l'aide de factorielles, sans chercher forcément à les calculer, du moment que l'expression est simplifiée.*

## Exercice 2 : Un calcul de somme

L'objectif de cet exercice est prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

1. Soit  $p \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $\binom{p}{j} \frac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1} \frac{1}{p+1}$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$ .
  - (c) Déterminer la valeur de  $\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$ .
2. En utilisant les résultats de la question précédente, prouver le résultat souhaité par récurrence.

## Exercice 3 : Bijection réciproque

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle réalise une bijection de l'ensemble  $E$  sur son image (que l'on précisera) et déterminer la réciproque associée.

1.  $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$  et  $E = [-2; +\infty[$ ;
2.  $g : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+5}$  et  $E = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$ ;
3.  $h : x \mapsto \sqrt[3]{1-x^3}$  et  $E = \mathbb{R}$  (on pourra calculer  $h \circ h$ ).

---

1. Ces mots ne sont peut-être pas présents dans le dictionnaire.

## Exercice 4 : Un peu de nombres complexes

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe  $z$  n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que  $z^n = 1$  pour aucune valeur de  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $z^n = 1$ , c'est-à-dire que  $(2+i)^n = (2-i)^n$ . De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1} (2i)^{n-k}.$$

1. Calculer le module de  $z$  ainsi que sa forme algébrique.
2. On considère l'ensemble :

$$\mathbb{L} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

- (a) Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$ . Montrer que  $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$  et  $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$ .
  - (b) En déduire que  $S \in \mathbb{L}$  puis que  $|S|^2 \in \mathbb{Z}$ .
3. Montrer que  $S = \frac{(2i)^n}{i-2}$  puis calculer  $|S|^2$ .
  4. Conclure.

## Problème 1

### Partie 1 : Préliminaires

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles non vides et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.
2. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

### Partie 2 : Etude d'une équation fonctionnelle

Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xf(y)) = yf(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty \quad (*)$$

3. Montrer que  $f$  est injective.
4. En déduire que  $f(1) = 1$ .
5. Montrer que  $\forall x > 0, \quad f(f(x)) = x$ .
6. En déduire que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
7. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ .
8. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ .
9. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x^n) = f(x)^n$ .
10. Montrer que pour tout  $0 < x < 1, \quad f(x) > 1$ .
11. En déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
12. Parmi les fonctions de référence que vous connaissez, laquelle vérifie les hypothèses  $(*)$  ?

## Problème 2

### Partie 1 : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

1. *Méthode 1.*

- (a) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Développer  $\cos(a - b)$ .
- (b) En prenant  $a = \frac{\pi}{3}$  et une valeur de  $b$  bien choisie, déterminer la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

2. *Méthode 2.*

- (a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x).$$

- (b) Vérifier que  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  est une racine du polynôme  $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1)$  puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .
- (d) En déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- (e) Retrouver alors que  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .

3. *Méthode 3.*

- (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sin(4x) + \sin(2x) = 2 \sin(3x) \cos(x)$ .
- (b) En déduire à nouveau la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

4. Calculer  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right)$ .

### Partie 2 : En passant par les complexes

On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$  et  $Z = z_1 z_2$ .

- 5. Calculer la forme algébrique de  $Z$ .
- 6. Déterminer une forme exponentielle pour chacun des complexes  $z_1, z_2$  et  $Z$ .
- 7. En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .
- 8. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(1 - \sqrt{3}) \cos x - (1 + \sqrt{3}) \sin x = \sqrt{6}$$

On pourra d'abord multiplier l'équation par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

- 9. Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$  et les représenter sur le cercle trigonométrique.