
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°3
À RENDRE POUR LE MERCREDI 5 NOVEMBRE 2025

Problème

Dans ce problème, on note ω le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On pourra remarquer que $\omega^3 = 1$. On définit la fonction $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3.$$

Partie A — Analyse complexe

1. (a) Développer le produit $(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2)$ et en déduire que $f(1, 1, 1) = 0$.

On sait que $(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2) = 1 - \omega^3 = 0$.
Comme $\omega \neq 1$, on obtient que $1 + \omega + \omega^2 = f(1, 1, 1) = 0$.

- (b) Calculer $f(1, \omega, \omega^2)$ et $f(1, \omega^2, \omega)$.

Un calcul direct assure que

$$f(1, \omega, \omega^2) = 1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$$

et que

$$f(1, \omega^2, \omega) = 1 + \omega^3 + \omega^3 = 3.$$

2. (a) Donner le module et un argument du nombre complexe $-\omega$.

On a $|\omega| = |e^{2i\pi/3}| = 1$ et

$$\arg(-\omega) = \arg(-e^{2i\pi/3}) = \arg(e^{-i\pi} \times e^{2i\pi/3}) = \arg(e^{-i\pi/3}) = -\pi/3.$$

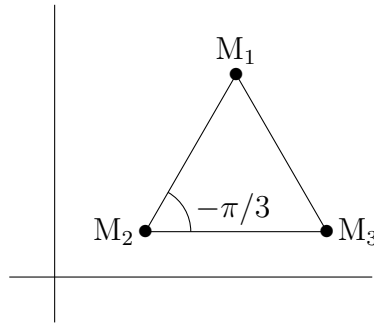
- (b) Donner le module du nombre complexe $1 - \omega$.

On calcule

$$|1 - \omega| = \left| 1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

Partie B — Triangles équilatéraux

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé direct et on identifie les points du plan à leur affixe complexe. Étant donnés trois points M_1 , M_2 et M_3 deux à deux distincts, on dit que le triangle $M_1M_2M_3$ est **équilatéral direct** lorsque $M_2M_1 = M_2M_3$ et la mesure de l'angle orienté $\widehat{M_1M_2M_3}$ vaut $-\pi/3$. La figure suivante montre un exemple de triangle équilatéral direct.



Soient M_1, M_2 et M_3 trois points deux à deux distincts, et z_1, z_2 et z_3 leurs affixes respectives.

1. Montrer que $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$

Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si

$$M_1M_2 = M_2M_3 \quad \text{et} \quad \widehat{M_1M_2M_3} = -\pi/3.$$

On a d'une part les équivalences

$$\begin{aligned} M_1M_2 = M_2M_3 &\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_3 - z_2| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} \right| = 1 \text{ car } z_2 \neq z_1 \end{aligned}$$

et d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned} \widehat{M_1M_2M_3} = -\pi/3 &\Leftrightarrow (\rightarrow M_2M_1, \rightarrow M_2M_3) = -\pi/3 \\ &\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} \right) = -\pi/3. \end{aligned}$$

Ainsi, $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$.

2. En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $f(z_1, z_2, z_3) = 0$.

En reprenant la condition précédente :

$$\begin{aligned} \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega &\Leftrightarrow z_3 - z_2 = -\omega z_1 + \omega z_2 \\ &\Leftrightarrow \omega z_1 - (1 + \omega) z_2 + z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega z_1 + \omega^2 z_2 + z_3 = 0 \text{ car } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z_1, z_2, z_3) = 0 \end{aligned}$$

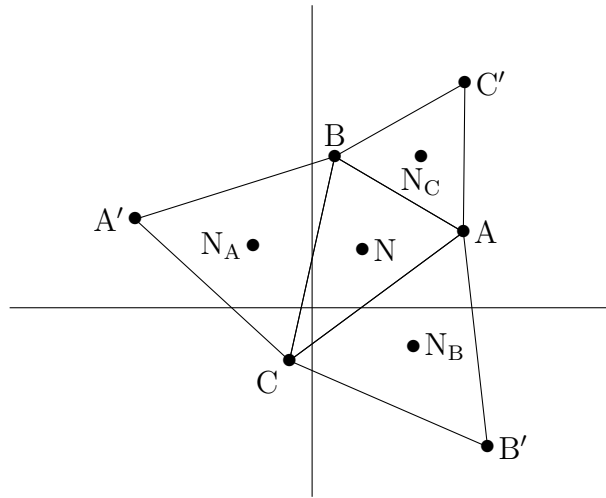
Ainsi le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si $f(z_1, z_2, z_3) = 0$.

Partie C — Un résultat géométrique

On donne la définition suivante : étant donné un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ du plan complexe, dont les sommets M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes z_1, z_2 et z_3 , on appelle **centre de gravité** de $M_1M_2M_3$ le point d'affixe

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Pour la suite du problème, on place dans la configuration suivante. On fixe trois points A, B et C deux à deux distincts du plan complexe. On construit les points A', B' et C' tels que les triangles $A'CB, B'AC$ et $C'BA$ sont équilatéraux directs. On appelle N, N_A, N_B, N_C les centres de gravité des triangles $ABC, A'CB, B'AC$ et $C'BA$. On notera $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', z_N, z_{N_A}, z_{N_B}$ et z_{N_C} , les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', N, N_A, N_B$ et N_C .



1. Exprimer α', β' et γ' en fonction de α, β, γ et ω .

En utilisant la condition équivalente de la partie B, $A'CB$ est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\alpha' - \beta}{\gamma - \beta} = -\omega$$

Ce qui équivaut à $\alpha' = \beta - \omega(\gamma - \beta)$.

De même ACB' est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\beta' - \gamma}{\alpha - \gamma} = -\omega$$

Ce qui équivaut à $\beta' = \gamma - \omega(\alpha - \gamma)$.

Puis BAC' est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\gamma' - \alpha}{\beta - \alpha} = -\omega$$

Ce qui équivaut à

$$\gamma' = \alpha - \omega(\beta - \alpha)$$

2. On pose $\delta = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$.

- (a) Montrer que $z_{N_B} - z_N = -\frac{\omega\delta}{3}$.

Erreur d'énoncé : $\delta = \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta$

$$z_{N_B} = \frac{1}{3} (\alpha + \gamma + \gamma - \omega (\alpha - \gamma)) = \frac{1}{3} ((1 - \omega) \alpha + (2 + \omega) \gamma)$$

$$z_N = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma).$$

D'où :

$$\begin{aligned} z_{N_B} - z_N &= \frac{1}{3} (-\omega\alpha - \beta + (1 + \omega) \gamma) \\ &= \frac{1}{3} (-\omega\alpha - \beta - \omega^2\gamma) \\ &= -\frac{\omega}{3} (\alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta) \\ &= -\frac{\omega\delta}{3} \end{aligned}$$

- (b) Exprimer de même $z_{N_C} - z_N$ et $z_{N_A} - z_N$ en fonction de ω et δ .

En suivant le même raisonnement, on trouve :

$$z_{N_C} - z_N = -\frac{\omega^2\delta}{3}$$

et

$$z_{N_A} - z_N = -\frac{\delta}{3}$$

- (c) Exprimer la longueur $N_A N_B$ en fonction de $|\delta|$.

On a :

$$\begin{aligned} N_A N_B &= |z_{N_B} - z_{N_A}| \\ &= |(z_{N_B} - z_N) - (z_{N_A} - z_N)| \\ &= \left| -\frac{\omega\delta}{3} + \frac{1}{3}\delta \right| \\ &= \frac{1}{3} |\delta| \times |1 - \omega| \\ &= \frac{|\delta|}{\sqrt{3}} \text{ d'après la question A2b.} \\ &= \frac{\sqrt{3} |\delta|}{3} \end{aligned}$$