Lycée Fénelon — BCPST1
Année 2025-2026 — A. Wassfi

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°2
Samedi 8 novembre 2025 (3h)

Exercice 1 : Au Scrabble

On dispose de dix jetons de Scrabble portant les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I et J avec lesquels on écrit des mots [1] de dix lettres en utilisant une et une seule fois chaque jeton.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons ?

   Un mot dépend uniquement de l'ordre dans lequel on place les dix jetons. C'est donc une permutation de ces 10 jetons. Il y en a donc $\boxed{10!}$.

2. Dans combien de mots les lettres J, G et B apparaissent-elles :

   (a) dans cet ordre et côte à côte ?

   Pour les compter, construisons les mots contenant le groupe de lettres « JGB ».
   • Le jeton J peut être placé entre la première et la huitième position (puisqu'il est suivi par au moins deux jetons), ce qui fait 8 positions possibles.
   • Une fois ce jeton placé, le G et le B viennent nécessairement à sa suite.
   • Une fois ces trois jetons J, G et B placées, il reste à placer les 7 autres jetons dans les 7 places restantes. Chaque mot dépend à nouveau uniquement de l'ordre dans lequel on place les jetons, si bien qu'il y en a 7 ! (encore des permutations).
   Finalement, il y a $\boxed{8 \times 7! = 8!}$ mots contenant le groupe de lettres « JGB ».

   (b) côte à côte, mais pas nécessairement dans cet ordre ?

   — Méthode 1 :
   Il suffit de compter la permutation de nos trois lettres : on multiplie le résultat précédent par 3!. On obtient donc : $\boxed{6 \times 8!}$.

   — Méthode 2 :
   On doit choisir 3 cases adjacentes : il y en a 8 (car on a un choix parmi 8 pour la première, les deux suivantes étant fixées).
   Ensuite, on place nos 3 lettres « JGB »dans l'ordre que l'on veut : c'est donc une permutation à 3 éléments et il y en a 3!.
   Enfin, on place les 7 lettres restantes : il y en a 7 ! (encore des permutations).
   Pour le résultat final, on doit multiplier les résultats intermédiaires : $8 \times 6 \times 7! = \boxed{6 \times 8!}$.

   (c) dans cet ordre, mais pas nécessairement côte à côte ?

1. Ces mots ne sont peut-être pas présents dans le dictionnaire.

— Méthode 1 :

Il y a $10\,!$ permutations possibles. Dans une de ces permutations, les lettres J, G et B peuvent apparaître dans n'importe lequel des $3! = 6$ ordres possibles. La condition sur l'ordre des lettres J, G et B représente 1 cas sur 6 donc le nombre de mots que l'on peut écrire avec ces dix lettres où les lettres J, G et B apparaissent dans cet ordre est $\boxed{\dfrac{10!}{6}}$.

— Méthode 2 :

Procédons comme dans la question 1.) :

• Déjà, il faut choisir les places occupées par les trois jetons J, G et B : on en choisit 3 parmi 10, ce qui fait $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$ possibilités.

• Une fois ces trois places choisies, on y met J, G et B dans l'ordre : 1 possibilité.

• Maintenant que les jetons J, G et B sont placés, il reste à placer les 7 autres jetons dans les 7 places restantes, ce qui donne 7! possibilités (voir permutations).

Ainsi, le nombre de mots contenant les lettres J, G et B dans l'ordre est $\boxed{120 \times 7!}$.

Exercice 2 : Un calcul de somme

L'objectif de cet exercice est prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, $\dbinom{p}{j} \dfrac{1}{1+j} = \dbinom{p+1}{j+1} \dfrac{1}{p+1}$.

Soit $j \in [\![0, p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\binom{p}{j} \frac{p+1}{1+j} &= \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{p+1}{1+j} \\
&= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \\
&= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p+1-(j+1))!} \\
&= \binom{p+1}{j+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\dbinom{p}{j} \dfrac{1}{1+j} = \dbinom{p+1}{j+1} \dfrac{1}{p+1}}$.

(b) Montrer que pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, $\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)!(p-j-1)!} + \frac{p!}{j!(p-j)!} \\
&= \frac{(p-j)p! + (j+1)p!}{(j+1)!(p-j)!} \\
&= \frac{(p+1)p!}{(j+1)!(p+1-(j+1))!} \\
&= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p+1-(j+1))!} \\
&= \binom{p+1}{j+1}.
\end{aligned}$$

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$.

D'après la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = (-1+1)^{p+1} = 0$.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, prouver le résultat souhaité par récurrence.

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.

Initialisation : Pour $p = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{1-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^0}{0+1} = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 = 1.$
La formule est donc vérifiée au rang $p = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $p \geq 1$, la formule soit vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

Montrons qu'elle reste vraie au rang $p+1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \binom{p+1}{p+1} \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \left(\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} \right) \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1}
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{p+1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} (-1)^j + \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} (-1)^{j-1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} (-1)^{j-1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

C'est exactement la formule attendue au rang $p+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$.

$$\boxed{\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}}.$$

Exercice 3 : Bijection réciproque

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle réalise une bijection de l'ensemble E sur son image (que l'on précisera) et déterminer la réciproque associée.

1. $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$ et $E = [-2; +\infty[$

$\forall x \geqslant -2,\ f(x) = (x+2)^2 - 2^2 + 1 = (x+2)^2 - 3$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $I = [-2; +\infty[$.
De plus, $\forall y \geqslant -3$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff (x+2)^2 - 3 = y \\ &\iff (x+2)^2 = y + 3 \\ &\iff x + 2 = \sqrt{y+3} \text{ car } y + 3 \geqslant 0 \\ &\iff x = \sqrt{y+3} - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $f([-2; +\infty[) = [-3; +\infty[$ et f réalise une bijection de $[-2; +\infty[$ sur $[-3; +\infty[$ et sa réciproque f^{-1} est définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$ de $[-3; +\infty[$ sur $[-2; +\infty[$.

2. $g : x \mapsto \dfrac{-2x+1}{3x+5}$ et $E = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{5}{3}\}$

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $y = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{-2x+1}{3x+5} = y \Leftrightarrow -2x+1 = y(3x+5) \Leftrightarrow x(-3y-2) = 5y-1$.
• Si $y = \dfrac{-2}{3}$, ceci équivaut à $0 = -\dfrac{13}{3}$, ce qui est absurde donc $\dfrac{-2}{3}$ n'admet pas d'antécédent par f.
• Si $y \neq \dfrac{-2}{3}$, ceci équivaut à $x = \dfrac{1-5y}{2+3y}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R} \backslash \{-\frac{5}{3}\}$, y admet un unique antécédent x par g qui est $f^{-1}(y)$, ce qui prouve que g est bijective de $E = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{5}{3}\}$ sur $g(E) = \mathbb{R} \backslash \{\frac{-2}{3}\}$ et sa réciproque g^{-1} est définie par $g^{-1}(y) = \dfrac{1-5y}{2+3y}$ (sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{-2}{3}\}$).

On a $g(\mathbb{R} \backslash \{-\frac{5}{3}\}) = \mathbb{R} \backslash \{\frac{-2}{3}\}$ et pour tout $y \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}$, y admet un unique antécédent x par g qui est $g^{-1}(y)$, ce qui prouve que g est bijective de E sur $g(E)$ et g^{-1} est sa réciproque.

3. $h : x \mapsto \sqrt[3]{1-x^3}$ et $E = \mathbb{R}$ (on pourra calculer $h \circ h$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h \circ h(x) = h(h(x)) = \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1-x^3}^3} = \sqrt[3]{1 - (1 - x^3)} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Donc $h \circ h = Id_{\mathbb{R}}$.
Donc h est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $h^{-1} = h$.

Exercice 4 : Un peu de nombres complexes

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z^n = 1$ pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire que $(2+i)^n = (2-i)^n$. De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}.$$

1. Calculer le module de z ainsi que sa forme algébrique.

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

$$|z| = \left|\frac{2+i}{2-i}\right| = \frac{|2+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{(2+i)^2}{2^2-i^2} = \frac{4+4i+i^2}{4-(-1)} \\ &= \frac{4+4i-1}{5} = \frac{3+4i}{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$

2. On considère l'ensemble :

$$\mathbb{L} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

(a) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$.

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. On peut écrire $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ où $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$.
Alors $z_1 + z_2 = a + a' + i(b + b') \in \mathbb{L}$ car $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$.
On dit alors que $\mathbb{L}$ est stable par addition.
De plus $z_1 \times z_2 = aa' - bb' + i(ab' + ba') \in \mathbb{L}$ car $aa' - bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + ba' \in \mathbb{Z}$.
On dit alors que $\mathbb{L}$ est stable par multiplication.

(b) En déduire que $S \in \mathbb{L}$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.

On a évidemment $\binom{n}{k} \in \mathbb{L}$, $2 - i \in \mathbb{L}$ et $2i \in \mathbb{L}$ donc $(2-i)^{k-1} \in \mathbb{L}$ (stabilité par multiplication) et $(2i)^{n-k} \in \mathbb{L}$ (stabilité par multiplication).
Donc $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}$ (stabilité par multiplication).
Par conséquent, en utilisant la stabilité par addition, on en déduit que $S \in \mathbb{L}$.
Ainsi, il existe des entiers relatifs $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $S = a + ib$.
On a alors $|S|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ puis calculer $|S|^2$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2-i} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k}(2i)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2-i} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{k}(2i)^{n-k} - (2i)^n - (2-i)^n \right) \\ &= \frac{1}{2-i} \left((2-i+2i)^n - (2i)^n - (2-i)^n \right) \\ &= \frac{1}{2-i} \left((2+i)^n - (2i)^n - (2-i)^n \right) \\ &= \frac{(2i)^n}{i-2} \text{ car } (2+i)^n = (2-i)^n \end{aligned}$$

On a alors $\boxed{|S|^2 = \dfrac{(2^n)^2}{(-2)^2+1^2} = \dfrac{2^{2n}}{5} = \dfrac{4^n}{5}}$.

4. Conclure.

5 ne divise pas 4^n donc $|S|^2 \notin \mathbb{Z}$.
Ceci est absurde.
On en déduit qu'il n'existe pas d'entier n tel que $z^n = 1$, autrement z n'est pas une racine de l'unité.

Problème 1

Partie 1 : Préliminaires

Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.
En composant par g, on a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$, i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
Par injectivité de $g \circ f$, ceci implique que $x = x'$.
Ainsi, on a bien $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, ce qui assure l'injectivité de f.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Soit $z \in G$.
Puisque $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Posons $y = f(x) \in F$. On a donc $z = g(y)$.
On a donc bien montré que pour tout $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, ce qui assure la surjectivité de g.

Partie 2 : Etude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xf(y)) = yf(x) \text{ et } \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \quad (*)$$

3. Montrer que f est injective.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) = f(y)$.

On a, par l'hypothèse $(*)$, $f(xf(y)) = yf(x)$ donc, comme $f(x) = f(y)$, $f(xf(y)) = f(xf(x)) = xf(x)$.

Ainsi $yf(x) = xf(x)$ et en divisant par $f(x) \neq 0$, on obtient $x = y$.

Donc f est injective.

4. En déduire que $f(1) = 1$.

Pour $x = y = 1$, on a : $f(f(1)) = f(1)$ donc, par injectivité de f, $\boxed{f(1) = 1}$.

5. Montrer que $\forall x > 0, \quad f(f(x)) = x$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xf(y)) = yf(x)$
donc $\forall x > 0, \quad f(1 \times f(x)) = xf(1)$ soit $\boxed{f(f(x)) = x}$ (car $f(1) = 1$).

6. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On vient de démontrer que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}_+^*}$ qui est bijective.
$f \circ f$ est donc injective donc f aussi.
$f \circ f$ est donc surjective donc f aussi.
Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad f(x.y) = f(x).f(y)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Comme f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $z \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = f(z)$. On a alors $f(y) = f^2(z) = z$ et :
$f(xy) = f(xf(z)) = zf(x) = f(y)f(x) = f(x)f(y)$.
Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \boxed{f(x.y) = f(x).f(y)}$.

8. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.
Alors $\dfrac{1}{y} \in \mathbb{R}_+^*$ donc, comme f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $z \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{1}{y} = f(z)$.
On a alors $1 = yf(z)$. Donc $f(1) = f(yf(z)) = zf(y)$, et comme $f(1) = 1$, on en déduit que $z = \dfrac{1}{f(y)}$.
Ainsi, $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(xf(z)) = zf(x) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.
On a bien montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \boxed{f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{f(y)}}$.

9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f(x^n) = f(x)^n$.

On démontre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation. Pour $n = 1$ on a $x^1 = x$, donc

$$f(x^1) = f(x) = f(x)^1,$$

la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité. Supposons que pour un certain $k \geq 1$ on ait $f(x^k) = f(x)^k$. Considérons $n = k+1$. On peut écrire $x^{k+1} = x^k \cdot x$. Par la propriété de multiplicativité de f démontrée à la question 5,

$$f(x^{k+1}) = f(x^k \cdot x) = f(x^k)f(x).$$

Par l'hypothèse de récurrence $f(x^k) = f(x)^k$, donc

$$f(x^{k+1}) = f(x)^k f(x) = f(x)^{k+1}.$$

Ainsi la propriété est vraie pour $k + 1$.
Par le principe de récurrence, la propriété $\boxed{f(x^n) = f(x)^n}$ tient pour tout entier $n \geq 1$.

10. Montrer que pour tout $0 < x < 1$, $\quad f(x) > 1$.

Soit $0 < x < 1$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0^+$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x^n) = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x)^n = +\infty$, ce qui n'est possible que si $f(x) > 1$.
On a bien, pour tout $0 < x < 1$, $\boxed{f(x) > 1}$.

11. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $0 < x < y$ deux réels.
Alors $0 < \dfrac{x}{y} < 1$ (on a bien $y \neq 0$) donc $f\left(\dfrac{x}{y}\right) > 1$ (d'après la question précédente).
Donc, d'après la question 6, $\dfrac{f(x)}{f(y)} > 1$ soit $f(x) > f(y)$ (qui sont tous positifs).
Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. Parmi les fonctions de référence que vous connaissez, laquelle vérifie les hypothèses $(*)$?

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vérifie ces propriétés :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \dfrac{1}{x \times \frac{1}{y}} = y \times \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Problème 2

Partie 1 : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

1. *Méthode 1.*

   (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Développer $\cos(a-b)$.

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Développons $\cos(a-b)$. Par le cours, on a :

   $$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}.$$

   (b) En prenant $a = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de b bien choisie, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   Posons $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ et déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Par la question précédente,

   $$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

2. *Méthode 2.*

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. On a les égalités suivantes dans $\mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}
   \sin(3x) &= \sin(2x + x) \\
   &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\
   &= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right) \\
   &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\
   &= 2\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\
   &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).
   \end{aligned}$$

   Conclusion :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)}.$$

(b) Vérifier que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine du polynôme $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrons que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine de $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\frac{2\sqrt{2}}{8} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est une racine de } f}.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1\right)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1\right) = 4x^3 + 2\sqrt{2}x^2 - x - 2\sqrt{2}x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1\right) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = f(x)$$

Déterminons les racines de $4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$. Soit Δ le discriminant associé :

$$\Delta = 8 + 16 = 24 = 4 \times 6.$$

Donc les racines associées sont

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right\}}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Calculons $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On a vu dans la question 2.a que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. En prenant $x = \frac{\pi}{12}$, on obtient,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Posons $X = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, alors,

$$4X^3 - 3X + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(X) = 0.$$

Donc par la question précédente,

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ou} \quad X = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4}$. Donc par la stricte croissance de la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 < X = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $X \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $X \neq -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} < 0$. Conclusion,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

(e) Retrouver alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2\\
&= 1-\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}\\
&= \frac{16-8+4\sqrt{3}}{16}\\
&= \frac{2+\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on observe que

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc par la stricte décroissance de la fonction cosinus sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

3. *Méthode 3.*

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(4x)+\sin(2x) = 2\sin(3x)\cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factorisons $\sin(4x)+\sin(2x)$. Par la formule $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a

$$\sin(4x)+\sin(2x) = 2\sin\left(\frac{6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\sin(3x)\cos(x).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sin(4x)+\sin(2x) = 2\sin(3x)\cos(x)}.$$

(b) En déduire à nouveau la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Calculons encore $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En prenant $x = \frac{\pi}{12}$ dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion, rien à faire, on obtient toujours le même résultat,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

4. Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right)$.

Calculons $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. On observe que $\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. Dès lors,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Conclusion, par la question 2.d

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

On observe que $2025 = 24 \times 84 + 9$. Donc

$$\frac{2025\pi}{12} = 84 \times 2\pi + \frac{9\pi}{12} = 84 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right) = \cos\left(84 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusion, (oui 2025 ne ramène pas du $\pi/12$)

$$\boxed{\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Partie 2 : En passant par les complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$ et $Z = z_1 z_2$.

5. Calculer la forme algébrique de Z.

Calculons Z. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$Z = z_1 z_2 = (1+i)\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusion, la forme algébrique de Z est donnée par

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}.$$

6. Déterminer une forme trigonométrique pour chacun des complexes z_1, z_2 et Z.

Calculons la forme exponentielle de z_1, z_2 et Z. On a :

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

De plus,

$$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Dès lors,

$$z_2 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Enfin,

$$Z = z_1 z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}\right)} = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \quad Z = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

7. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Calculons $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Par les deux précédentes questions, on a :

$$Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Par unicité de la forme algébrique, on en déduit que

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

8. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = \sqrt{6}$$

Résolvons (E) : $(1-\sqrt{3})\cos(x) - (1+\sqrt{3})\sin(x) = \sqrt{6}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En multipliant par $\frac{\sqrt{2}}{4}$, on a :

$$\begin{aligned}
(E) \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin(x) = \frac{\sqrt{12}}{4} \\
\Leftrightarrow\ & -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin(x) = \frac{2\sqrt{3}}{4} \\
\Leftrightarrow\ & -\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x - \frac{5\pi}{12} \equiv \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}[2\pi] \quad \text{OU} \quad x - \frac{5\pi}{12} \equiv \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}[2\pi] \\
\Leftrightarrow\ & x \equiv \frac{5\pi}{12} + \frac{10\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}[2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{12} + \frac{14\pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \equiv -\frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

9. Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ et les représenter sur le cercle trigonométrique.

Précisons les solutions dans $[\ 0; 2\pi\ [$ et représentons-les. Par la question précédente, les solutions dans $[0; 2\pi[$, sont :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0;2\pi[} = \left\{ \frac{5\pi}{4} ; \frac{19\pi}{12} \right\}}.$$

Ainsi,