Liste d'exercices n°9 — Calcul différentiel et intégral

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f puis calculer sa dérivée f' en précisant son ensemble de définition $\mathcal{D}'$.

1. $f(x) = 15x^2(4x-2)$
2. $f(x) = 2^x$
3. $f(x) = (\tan x)^2$
4. $f(x) = 3\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$
6. $f(x) = x^3\cos(2x+1)$
7. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x+1}}$
8. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{3x^2+4}}$

Exercice 2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, puis construire leur tableau de variation détaillé sur leur ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto 2x^3+3x^2-12x+7$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{-3x+4}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x-x^2}{x+1}$

Exercice 3. Montrer que pour tout réel x, $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant e^x$.

Exercice 4. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

Exercice 5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes.

1. cos
2. ln
3. $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$
4. $g\colon x \longmapsto e^{-x}$

Exercice 6. Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y + e^{xy} - 3x + 2.$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = xy^2 + ye^x - \ln\bigl(1 + x^2 + y^2\bigr).$$

Calculer les dérivées partielles des fonctions f et g.

Exercice 7. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $t \longmapsto (2t+1)^7$
2. $u \longmapsto \dfrac{1}{3u}$
3. $x \longmapsto e^{\sin(x)}\cos(x)$
4. $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
6. $x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
7. $u \longmapsto \dfrac{1}{u\ln(u)}$

Exercice 8. On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0\ ;\ 1], \quad f(x) = \frac{2x+5}{x+1}.$$

1. (a) Donner, en justifiant, les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

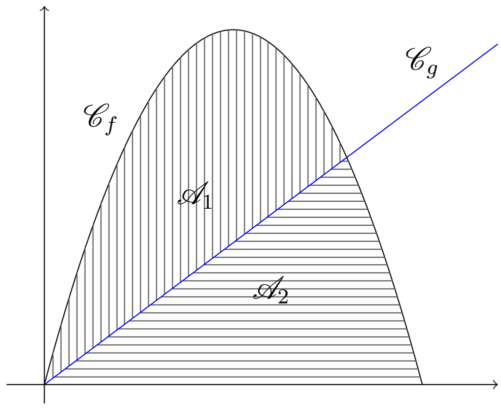
$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}.$$

   (b) Soit L l'intégrale définie par : $L = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de L.

2. En appliquant la méthode précédente, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x-1}{x+3}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9.

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 15x$ et celle de la fonction g définie par $g(x) = 3x$. On définit $\mathscr{A}_1$ la surface remplie de lignes verticales et $\mathscr{A}_2$ celle remplie de lignes horizontales.



Laquelle des aires de ces deux surfaces est la plus grande ? Justifier.

Exercice 10.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t+7}{t^2+2t-3}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on ait

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{t+7}{t^2+2t-3}\mathrm{d}t.$$

Exercice 11. Trouver une primitive de la fonction suivante :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}.$$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(2t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(t)dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\sin^4(t)dt$

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{3x} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} \sin(x) \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 t^2 \arctan(t) \mathrm{d}t$

Exercice 14. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto \ln^2(x)$
2. $t \longmapsto \sin\left(\sqrt[3]{t}\right)$
3. $t \longmapsto t\ln(t)$.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$
5. (a) $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$
   (b) $x \longmapsto \sqrt{9-4x^2}$

Exercice 15.
Considérons les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)} \mathrm{d}t.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, puis en déduire les valeurs de C et de S.
3. Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}.$$

   (a) Vérifier que l'intégrale I est bien définie.
   (b) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale I.

Exercice 16. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)} dx$
   On pourra faire le changement de variable $u = \cos(x)$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)} dx$
   On pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$.