
DEVOIR MAISON N°5
A RENDRE POUR LE MERCREDI 19 NOVEMBRE 2025

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Déterminer les parties paire et impaire de la fonction f .
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Montrer que pour tout $y \in]0; 1[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; 1[$ de bijection réciproque f^{-1} définie pour tout $x \in]0; 1[$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

6. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; 1[$ et que pour tout $x \in]0; 1[$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}.$$