Corrigé de la liste d'exercices n°9 — Calcul différentiel et intégral

Exercice 1.

1. $f(x) = 15x^2(4x-2)$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 30x(4x-2) + 15x^2 \times 4 = 180x^2 - 60x$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} = 2^x \ln 2$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

3. $f(x) = (\tan x)^2$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$f'(x) = 2\tan' x \cdot \tan x = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$$
$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$$

4. $f(x) = 3\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x}\right) = 3(x^{-3} + x^{-1})$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$f'(x) = 3(-3x^{-4} - x^{-2}) = -\frac{9}{x^4} - \frac{3}{x^2} = -\frac{3(x^2+3)}{x^4}$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$\text{On a } \frac{1+x}{1-x} > 0 \iff -1 < x < 1$$
$$\mathcal{D} =]-1, 1[$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\mathcal{D}' =]-1, 1[$$

6. $f(x) = x^3 \cos(2x+1)$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3x^2\cos(2x+1) + x^3 \cdot (-\sin(2x+1)) \cdot 2 = 3x^2\cos(2x+1) - 2x^3\sin(2x+1)$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

7. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2+x+1}} \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

8. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{3x^2+4}} = e^{-3x^2-2x-4}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = (-6x-2)e^{-3x^2-2x-4} = -2(3x+1)e^{-3x^2-2x-4}$$
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

Exercice 2.

1. $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 \\ &= 6x^2 + 6x - 12 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324 > 0$ donc il a deux solutions réelles.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-18}{12} = -2.$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+18}{12} = 1.$
Comme $a = 6 > 0$, ce trinôme a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	29	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{-3x+4}$
On détermine la valeur interdite $-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = 4/3$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{\frac{4}{3}\}$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 3$ et $v(x) = -3x + 4$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{1 \times (-3x + 4) - (x + 3) \times (-3)}{(-3x + 4)^2} \\ &= \frac{-3x + 4 + 3x + 9}{(-3x + 4)^2} \\ &= \frac{13}{(-3x + 4)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$4/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

3. f est définie pour $x \neq -1$, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   Calculons ensuite la dérivée de $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x + 1} = \dfrac{u}{v}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} &\iff f'(x) = \frac{(1 - 2x)(x + 1) - (x - x^2) \times 1}{(x + 1)^2} \\ &\iff f'(x) = \frac{x + 1 - 2x^2 - 2x - x + x^2}{(x + 1)^2} \\ &\iff f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

   On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8 > 0$ donc il a deux solutions réelles.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$.
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$.

   Comme $a = -1 < 0$, ce trinôme a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-2x+1$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(x+1)^2$			$+$		0		$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \; \| \; -\infty$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

On calcule les extremums locaux : $f(-1-\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$ et $f(-1+\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}$.

Exercice 3. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

f est deux fois dérivable et on a pour tout réel x :

$$f'(x) = e^x - (1+x)\,, \quad f''(x) = e^x - 1.$$

- Pour $x \geq 0$:
  — $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$, donc f' est croissante sur $[0, +\infty[$.
  — $f'(0) = 0$, donc $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
  — Par conséquent, f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \geq 0$.
- Pour $x \leq 0$:
  — $f''(x) = e^x - 1 \leq 0$, donc f' est décroissante sur $]-\infty, 0]$.
  — $f'(0) = 0$, donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$.
  — Par conséquent, f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \geq 0$.

Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction dérivables et on a pour tout réel x :

$$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2-1)(-e^{-x}) = 2xe^{-x} + (-x^2+1)e^{-x} = e^{-x}(-x^2+2x+1).$$

Calculons le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times \times(-1) = 8 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 1-\sqrt{2}$. Comme $a = -2 < 0$, ce trinôme a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
e^{-x}				$+$			
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		-1.25	$\nearrow$	0.43	$\searrow$	

Exercice 5.

1. Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos' = -\sin, \cos^{(2)} = -\cos, \cos^{(3)} = \sin, \cos^{(4)} = \cos$.

   On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, cos est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et pour tout $n \in \mathbb{N}, \cos^{(4n)} = \cos, \cos^{(4n+1)} = -\sin, \cos^{(4n+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4n+3)} = \sin$.

   Remarque : on a aussi, pour tout réel x, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, que l'on peut également montrer par récurrence.

2. Soit $f(x) = \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$.

   On a :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad \ldots$$

   On reconnaît l'expression suivante, que l'on démontre par une récurrence immédiate (voir question suivante) :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

   Pour $n = 0$, on a : $f^{(0)}(x) = \ln x$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(2-x)^{n+1}}$.

   • **Initialisation :** pour $n = 0$, on a bien f de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et pour tou $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{0!}{(2-x)^{0+1}}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   • **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(2-x)^{n+1}}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$.

   Posons $u(x) = 2 - x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{u^{n+1}(x)}$. Puisque u est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{(n+1)n!u'(x)}{u^{n+2}(x)} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

4. Soit $g(x)=e^{-x}$.
   On observe :
   $$g'(x)=-e^{-x},\quad g''(x)=e^{-x},\quad g^{(3)}(x)=-e^{-x},\quad \dots$$
   D'où la formule générale que l'on démontre par une récurrence immédiate :
   $$\boxed{g^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x},\quad \forall n\in\mathbb{N}.}$$

Exercice 6.

Fonction $f(x,y)=x^2y+e^{xy}-3x+2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+ye^{xy}-3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+xe^{xy}.$$

Fonction $g(x,y)=xy^2+ye^x-\ln(1+x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y^2+ye^x-\frac{2x}{1+x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2xy+e^x-\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

Ainsi, les dérivées partielles sont :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy+ye^{xy}-3, & \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+xe^{xy}, \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial x}=y^2+ye^x-\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}, & \dfrac{\partial g}{\partial y}=2xy+e^x-\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}.\end{array}}$$

Exercice 7.

1. $t\mapsto \dfrac{(2t+1)^8}{16}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $u\mapsto \dfrac{1}{3}\ln(|u|)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. $x\mapsto e^{\sin(x)}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $t\mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ définie et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$.
5. $x\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $x\mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. $u\mapsto \ln(\ln(u))$ définie et dérivable sur $]1,+\infty[$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0\ ;\ 1], \quad f(x) = \frac{2x+5}{x+1}.$$

1. (a)

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} \iff \frac{2x+5}{x+1} = \frac{a(x+1)+b}{x+1}$$
$$\iff \frac{2x+5}{x+1} = \frac{ax+a+b}{x+1}$$

Donc $a = 2$ et $a + b = 5$ donc $b = 5 - 3 = 2$.
Ainsi, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}.$$

(b) $L = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2 + \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2 + [3\ln(x+1)]_0^1 = 2 + 3\ln 2.$

2. En appliquant la méthode précédente, calculer

$$\int_0^1 \frac{6x-1}{x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$: $\dfrac{6x-1}{x+3} = \dfrac{6(x+3)-19}{x+3} = 6 - \dfrac{19}{x+3}.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{6x-1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 6 - \frac{19}{x+3}\,\mathrm{d}x = 2 - [19\ln(x+3)]_0^1 = 2 - 19\ln 2.$

Exercice 9. Nous devons d'abord déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

- $f(x) = 0$ soit $-3x^2 + 15x = 0$ ou encore $-3x(x-5) = 0$ donc soit $x = 0$ soit $x = 5$;
- $f(x) = g(x)$ soit $-3x^2 + 15x = 3x$ soit $-3x^2 + 12x = 0$ ou encore $-3x(x-4) = 0$ donc soit $x = 0$ soit $x = 4$.

Par conséquent, en considérant les aires, on obtient :

$$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 -3x^2 + 15x\mathrm{d}x \text{ et } \mathscr{A}_1 = \int_0^4 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 -3x^2 + 15x - 3x\mathrm{d}x$$

Donc $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^4 -3x^2 + 12x\mathrm{d}x = \left[-x^3 + 6x^2\right]_0^4 = -64 + 6 \times 16 = 32$

$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_0^5 -3x^2 + 15x\mathrm{d}x = \left[-x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^5 = -125 + 15 \times 25/2 = -125 + 187,5 = 62,5.$

Donc $\mathscr{A}_2 = 62,5 - \mathscr{A}_1 = 30,5$ donc $\mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$.

Exercice 10.

1. La fonction est bien définie si $t^2 + 2t - 3 \neq 0$, i.e. si $t \notin \{1, -3\}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.
2. Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3} \Leftrightarrow \frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{(a+b)t + 3a - b}{t^2+2t-3} \Leftrightarrow t+7 = (a+b)t + 3a - b.$$

Par identification, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 1 \\ 3a-b &=& 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b &=& -1 \end{array}\right. .$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt = \int_{-2}^{0} \left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+3} \right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$I = 2\int_{-2}^{0} \frac{dt}{t-1} - \int_{-2}^{0} \frac{dt}{t+3} = 2[\ln(|t-1|)]_{-2}^{0} - [\ln(|t+3|)]_{-2}^{0} = -2\ln(3) - \ln(3) = -3\ln(3).$$

Exercice 11. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ est définie sur $[1, +\infty[$.

On a pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est alors $F : x \mapsto \dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Exercice 12.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(2t) = \dfrac{\cos(4t)+1}{2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\pi} \cos^2(2t) dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(4t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}) = -\frac{1}{8i}(2i\sin(3t) - 6i\sin(t)) = \frac{3\sin(t)-\sin(3t)}{4}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\pi} \sin^3(t) dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin(t) dt - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin(3t) dt = \frac{3}{4}[-\cos(t)]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

3. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(t)\sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{128}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it})(e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
&= \frac{1}{128}(2\cos(7t) - 2\cos(5t) - 6\cos(3t) + 6\cos(t)) \\
&= \frac{1}{64}(\cos(7t) - \cos(5t) - 3\cos(3t) + 3\cos(t)).
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t) dt &= \frac{1}{64}\left(\int_0^{\pi} \cos(7t) dt - \int_0^{\pi} \cos(5t) dt - 3\int_0^{\pi} \cos(3t) dt + 3\int_0^{\pi} \cos(t) dt\right) \\
&= \frac{1}{64}\left(\left[\frac{\sin(7t)}{7}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin(5t)}{5}\right]_0^{\pi} - 3\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\pi} + 3[\sin(t)]_0^{\pi}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\int_0^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on réalise le changement de variable $u = \pi - t$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3(\pi - u)\sin^4(\pi - u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3(u)\sin^4(u)du$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u)\sin^4(u)du$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt = 0$.

4. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2(t)\sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}(e^{2it}+2+e^{-2it})(e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it}) \\
&= \frac{1}{64}(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4) \\
&= \frac{1}{32}\cos(6t)-\frac{1}{16}\cos(4t)-\frac{1}{32}\cos(2t)+\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^2(t)\sin^4(t)dt &= \frac{1}{32}\int_0^{\pi}\cos(6t)dt - \frac{1}{16}\int_0^{\pi}\cos(4t)dt - \frac{1}{32}\int_0^{\pi}\cos(2t)dt + \frac{1}{16}\int_0^{\pi} dt \\
&= \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6t)}{6}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{16}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{16} \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 x^3 e^{3x}dx$.

On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = x^3, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 3x^2, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{1}{3}x^3e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 x^2e^{3x}dx = \frac{e^3}{3} - \int_0^1 x^2e^{3x}dx.$$

On réalise une nouvelle intégration par parties en posant $u(x) = x^2, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 2x, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3}x^2e^{3x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx.$$

Enfin, on effectue une dernière intégration par parties en posant $u(x) = x, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}[e^{3x}]_0^1 = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}.$$

2. Soit $I = \int_0^1 e^{-x}\sin(x)dx$.
On réalise une intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \sin(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = \cos(x)$ et on obtient
$$I = [-\sin(x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\cos(x)dx = -\sin(1)e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}\cos(x)dx.$$
On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \cos(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = -\sin(x)$ et on obtient
$$I = -\sin(1)e^{-1} + [-e^{-x}\cos(x)]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\sin(x)dx = -\sin(1)e^{-1} - e^{-1}\cos(1) + 1 - I$$
d'où
$$2I = 1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))$$
et finalement $I = \dfrac{1 - e^{-1}(\cos(1)+\sin(1))}{2}$.
3. Soit $I = \int_0^1 t^2\arctan(t)dt$.
On réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = t^2, v(t) = \arctan(t), u(t) = \dfrac{t^3}{3}, v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et on obtient
$$I = \left[\frac{t^3\arctan(t)}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt.$$
Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^3}{1+t^2} = t \times \dfrac{t^2}{1+t^2} = t\left(1 - \dfrac{1}{1+t^2}\right) = t - \dfrac{t}{1+t^2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient
$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 tdt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1-\ln(2)}{2}$$
donc
$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln(2)-1}{6}.$$

Exercice 14.

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln^2(t)dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \ln^2(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t), v'(t) = \ln(t), u'(t) = \dfrac{1}{t}, v(t) = t\ln(t) - t$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} F(x) &= [\ln(t)(t\ln(t)-t)]_1^x - \int_1^x (\ln(t)-1)dt \\ &= \ln(x)(x\ln(x)-x) - \int_1^x \ln(t)dt + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x)-1) - [t\ln(t)-t]_1^x + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x)-1) - x\ln(x) + x - 1 + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x)-2) + 2x - 2. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \sin(\sqrt[3]{t})dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \sin(\sqrt[3]{x})$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On effectue un changement de variables en posant $u = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = u^3$ d'où $dt = 3u^2du$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3\int_0^{\sqrt[3]{x}} u^2 \sin(u)du.$$

On effectue une intégration par parties en posant $x(u) = u^2, y'(u) = \sin(u), x'(u) = 2u, y(u) = -\cos(u)$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3[-u^2\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} + 6\int_0^{\sqrt[3]{x}} u\cos(u)du = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\int_0^{\sqrt[3]{x}} u\cos(u)du.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \cos(u), x'(u) = 1, y(u) = \sin(u)$ et on obtient

$$F(x) = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6[u\sin(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} - 6\int_0^{\sqrt[3]{x}} \sin(u)du = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x}) - 6[-\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cos(\sqrt[3]{x}) - 6$.

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse , la fonction $F : x \mapsto \int_1^x t\ln(t)dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t), v'(t) = t, u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{t^2}{2}$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + \frac{1}{4}.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 \neq 0$ car le discriminant de ce trinôme du second degré est strictement négatif. Posons pour tout réel $x, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{(\frac{t+1}{2})^2 + 1}$.
On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{t+1}{2}$ d'où $du = \frac{dt}{2}$ ou encore $dt = 2du$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}[\arctan(u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} = \frac{\arctan(\frac{x+1}{2}) - \arctan(\frac{1}{2})}{2}.$$

5. (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'unique primitive de f sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0 est $F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - t^2}dt$.
On effectue le changement de variable $u = \arccos(t) \Leftrightarrow t = \cos(u)$ d'où $dt = -\sin(u)du$.

Ainsi, on a pour tout $x \in [-1,1]$,

$$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} -\sqrt{1-\cos^2(u)}\sin(u)du=\int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2(u)}\sin(u)du.$$

Or, pour tout $x\in[-1,1], \arccos(x)\in[0,\pi]$ et pour tout $u\in[0,\pi], \sin(u)\geqslant 0$ donc $\sqrt{\sin^2(u)}=|sin(u)|=\sin(u)$ d'où pour tout $x\in[-1,1]$,

$$F(x)=\int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(u)du=\frac{1}{2}\int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2u))du=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos(x)-\frac{1}{4}[\sin(2u)]_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$F(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(2\arccos(x))-\frac{1}{2}\arccos(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x))-\frac{1}{2}\arccos(x)$$

donc finalement pour tout $x\in[-1,1], F(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}\arccos(x)$.

(b) La fonction $g:x\mapsto\sqrt{9-4x^2}$ est définie si $9-4x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$. Ainsi, g est définie et continue sur $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ et d'après le théorème fondamental de l'analyse, $G:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sqrt{9-4t^2}dt$ est l'unique primitive de g qui s'annule en 0.

On a pour tout $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}], G(x)=3\displaystyle\int_0^x\sqrt{1-\frac{4}{9}t^2}dt$. On effectue un changement de variable en posant $u=\dfrac{2}{3}t$ d'où $du=\dfrac{2}{3}dt$, puis $dt=\dfrac{3}{2}du$ et on obtient pour tout $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$,

$$G(x)=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{2}{3}x}\sqrt{1-u^2}du=\frac{9}{2}F\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{9\pi}{8}+\frac{3}{2}x\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}-\frac{9}{4}\arccos\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Exercice 15.

1. Tout d'abord, notons que les deux intégrales sont bien définies car pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}], \cos(t)+\sin(t)\neq 0$. En effet, on a

$$\cos(t)+\sin(t)=0\Leftrightarrow\cos(t)=-\sin(t)\Leftrightarrow\cos(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\Leftrightarrow t\equiv\frac{\pi}{2}+t[2\pi]\,\text{ou}\,t\equiv-\frac{\pi}{2}-t[2\pi]$$

d'où $t\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui est impossible pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Posons le changement de variable $u=\dfrac{\pi}{2}-t$ d'où $du=-dt$ dans l'intégrale C. On obtient

$$C=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos(\frac{\pi}{2}-u)+\sin(\frac{\pi}{2}-u)}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{\sin(u)+\cos(u)}du=S.$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on a $C+S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$.

Or, $C=S$ donc $\dfrac{\pi}{2}=C+S=2C$ d'où $C=S=\dfrac{\pi}{4}$.

3. (a) Tout d'abord, $t\mapsto\sqrt{1-t^2}$ est bien définie si $1-t^2\geqslant 0\Leftrightarrow t^2\leqslant 1\Leftrightarrow t\in[-1,1]$.
Par ailleurs, vérifions que pour tout $t\in[-1,1], t+\sqrt{1-t^2}\neq 0$. On a

$$t+\sqrt{1-t^2}=0\Rightarrow\sqrt{1-t^2}=-t\Rightarrow 1-t^2=t^2\Rightarrow t^2=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, pour $t = \frac{\sqrt{2}}{2}, t + \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2} \neq 0$ et pour $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, t + \sqrt{1-t^2} = 0$ donc la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est définie sur $[-1,1] \setminus \{-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. A fortiori, elle est définie et continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I est bien définie.

(b) Posons $u = \arcsin(t) \Leftrightarrow t = \sin(u)$ d'où $dt = \cos(u)du$. On obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{1-\sin^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{\cos^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + |\cos(u)|} du.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(u) \geqslant 0$ donc $|\cos(u)| = \cos(u)$ donc $I = C = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 16. Tout d'abord, notons que les deux intégrales de cet exercice sont bien définies car pour tout réel $x, 3 + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{3}{2} \notin [-1,1]$, ce qui est impossible.

1. On a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1+4\cos^2(x)} dx$

   On pose $u = \cos(x)$ d'où $du = -\sin(x)dx$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)} dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+4u^2} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+(2u)^2}.$$

   On pose maintenant $t = 2u$, d'où $dt = 2du$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}[\arctan(t)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \arctan(\sqrt{2})$$

   car $\arctan(-\sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2})$ par imparité de arctan.

2. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{5-4\sin^2(x)} dx$.

   On pose $u = \sin(x)$ d'où $du = \cos(x)dx$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{5-4u^2}.$$

   Or, pour tout $u \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, on a $\displaystyle\frac{1}{5-4u^2} = \frac{1}{(\sqrt{5}-2u)(\sqrt{5}+2u)} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2u} + \frac{1}{\sqrt{5}-2u}\right)$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)} dx &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5}+2u} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5}-2u} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left[\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2u)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left[\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}-2u)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \frac{\ln(\sqrt{5}+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{4\sqrt{5}}. \end{aligned}$$