Liste d'exercices n°10 — Equations différentielles linéaires simples

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y.
Pour chacune d'elles, donner ensuite toutes les solutions y qui vérifient $y(0) = 1$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x)$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 5y(t) = 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) - 6y(x) = 14$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (x-1)e^{2x}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = \cos(2x)e^{x}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = x^2 + 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, 3y'(x) + 2y(x) = x + e^{2x}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, 3xy'(x) - 4y(x) = x$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 2\sin(x)$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + e^{x}y(x) = 0$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^{x} + e^{-x})$.
11. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$.
12. $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[, y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin(2x) + \cos(x)$.

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : |x|y'(x) + (x-2)y(x) = x^3.$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y.

1. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 0$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = e^{x}\cos(x)$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto e^{x}\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right)$, avec a et b deux réels.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx$, avec a et b deux réels.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^{x}$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{x}$, avec a et b réels.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2 = 0$.

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x).$$

Exercice 7. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

Exercice 8.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue z :

$$z'' - z = 0.$$

2. Résoudre alors l'équation différentielle (d'ordre 4) suivante d'inconnue y :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

Exercice 9. Appelons (E) l'équation différentielle suivante (à cœfficients non constants !), d'inconnue y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)^2 y''(x) - 2e^x(1+e^x)y'(x) - (3e^x+1)y(x) = 0.$$

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation différentielle (E) par changement d'inconnue.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Considérons la fonction $g\colon x \longmapsto \dfrac{f(x)}{1+e^x}$.
   Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle (H).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 10. On considère l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y.$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 3$.
3. Étudier le signe de la solution obtenue et discuter sa limite lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle (E)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. En utilisant la méthode de variations de la constante, déterminer une solution particulière y_p de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 12. [Refroidissement de Newton] On modélise la température $T(t)$ (en °C) d'un objet plongé dans un milieu ambiant de température constante T_{ext} par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\big(T(t) - T_{\text{ext}}\big), \quad k > 0.$$

1. Interpréter le signe de k et de la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ selon que $T(t) > T_{\text{ext}}$ ou $T(t) < T_{\text{ext}}$.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. On suppose $T(0) = T_0$. Exprimer $T(t)$ en fonction de t, T_0, T_{ext} et k.
4. Discuter la limite de $T(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 13. [Cinétique chimique simple] Dans un réacteur parfaitement agité, on considère une espèce chimique de concentration $C(t)$ (en mol/L) vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -kC(t) + a,$$

où $k > 0$ et $a \geq 0$ sont des constantes (consommation proportionnelle à C, apport constant).

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. On suppose que la concentration initiale est $C(0) = C_0$. Exprimer $C(t)$ en fonction de t, C_0, k et a.
3. Montrer que $C(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$ et la déterminer.
4. Discuter l'influence des paramètres k et a sur cette concentration d'équilibre.

Exercice 14. [Oscillateur harmonique] On considère un point matériel de masse $m > 0$ soumis à une force de rappel linéaire de constante $k > 0$ (sans frottement). Sa position $x(t)$ (sur un axe) vérifie

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx(t) = 0.$$

1. Mettre l'équation sous la forme

   $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

   en précisant ω.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. On suppose que $x(0) = x_0$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$. Déterminer la solution correspondant à ces conditions initiales.
4. Discuter la périodicité du mouvement.