Corrigé de la liste d'exercices n°10 Equations différentielles linéaires

Exercice 1

1. $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   L'unique solution telle que $y(0) = 1$ est $\exp$.
2. On considère l'équation homogène $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 5y(t) = 0$.
   Alors $\mathcal{S}_H = \{y : t \longmapsto \lambda e^{-5t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Une solution particulière de l'équation avec second membre est la fonction constante égale à $\dfrac{2}{5}$ donc $\mathcal{S}_E = \{y : t \longmapsto \lambda e^{-5t} + \frac{2}{5}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   On a alors $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{5}$.
   L'unique solution telle que $y(0) = 1$ est donc $y : t \longmapsto \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5}$.
3. L'équation est équivalente à $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 7$.
   On considère l'équation homogène $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 0$.
   Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Une solution particulière de (H) est la fonction constante égale à $-\dfrac{7}{3}$ donc
   $$\mathcal{S}_E = \left\{y : x \longmapsto \lambda e^{3x} - \frac{7}{3}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
   On a alors $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{3}$ donc l'unique solution telle que $y(0) = 1$ est $y : x \longmapsto \frac{10}{3}e^{3x} - \frac{7}{3}$.

Exercice 2

1. • $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = 0$.
   $$\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
   • Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{2x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a les équivalences :
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (x-1)e^{2x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{2x} + 2\lambda(x)e^{2x} - 2\lambda(x)e^{2x} = (x-1)e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{x^2}{2} - x + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}\end{aligned}$$
   donc $\mathcal{S}_E = \left\{y : x \longmapsto \lambda e^{2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
2. • $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$.
   $$\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = \cos(2x)e^x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = \cos(2x)e^x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \cos(2x) \\
&\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + c \\
&\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^x + \frac{\sin(2x)}{2}e^x
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \longmapsto \lambda e^x + \dfrac{\sin(2x)}{2}e^x, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3. • $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 0$.
   On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   • On remarque facilement que la fonction $y : x \longmapsto x$ est solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
4. On a $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}y(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
   • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}y(x) = 0$.
   On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \longmapsto \lambda(1+x^2), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   • On remarque facilement que la fonction constante égale à $-\frac{1}{2}$ est solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda(1+x^2) - \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5. On a $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \dfrac{2}{3}y(x) = \dfrac{x + e^{2x}}{3}$.
   • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \dfrac{2}{3}y(x) = 0$.
   Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   • Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = \frac{x+e^{2x}}{3} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} = \frac{x+e^{2x}}{3} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x}).
\end{aligned}$$

   Cherchons une primitive de $x \mapsto xe^{\frac{2}{3}x}$ en réalisant une intégration par parties.
   On a

$$\int_0^x te^{\frac{2}{3}t}dt = \left[\frac{3}{2}te^{\frac{2}{3}t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}t}dt = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \left[\frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}t}\right]_0^x = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{9}{4}.$$

   On peut donc choisir comme primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x})$ la fonction

$$\lambda : x \longmapsto \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{3}{8}e^{\frac{8}{3}x}\right) = \frac{1}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{8}e^{\frac{8}{3}x}$$

   donc une solution particulière est

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \ln(1+e^x) + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7. On remarque que si pour tout réel $x, 3xy'(x) - 4y(x) = x$, alors $y(0) = 0$.
• Commençons par résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
L'équation homogène est $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$ qui admet comme ensemble de solutions $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{\frac{4}{3}\ln(x), \lambda \in \mathbb{R}} = \{y : x \longmapsto \lambda x^{\frac{4}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On remarque que $x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} - x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
• Résolvons maintenant (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
L'équation homogène est $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$ qui admet comme ensemble de solutions $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \mu e^{\frac{4}{3}\ln(-x), \mu \in \mathbb{R}} = \{y : x \longmapsto \mu x^{\frac{4}{3}}, \mu \in \mathbb{R}\}$.
On remarque que $x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ est $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \mu x^{\frac{4}{3}} - x, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Finalement, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(0) & = & 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) & = & \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) & = & \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant 0, y(x) & = & \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) & = & \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. .$$

8. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
• On remarque que la fonction constante égale à 2 est une solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^{\cos(x)} + 2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
9. On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-e^x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
10. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^x + e^{-x}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = x^2(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x^2 + x^2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Cherchons une primitive de $x \longmapsto x^2e^{-2x}$ sous la forme $z(x) = (ax^2+bx+c)e^{-2x}$.
On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = x^2e^{-2x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2ax+b-2ax^2-2bx-2c)e^{-2x} = x^2e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2+(2a-2b)x+b-2c = x^2\end{aligned}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2a-2b &= 0 \\ b-2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc finalement, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \dfrac{x^3}{3} + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-2x}$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, y(x) = \dfrac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}$.

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^x + \dfrac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

11. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-2x}\}$.
• Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax^2+bx+c$. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2-2x+3 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax+b+2ax^2+2bx+2c = x^2-2x+3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c = x^2-2x+3.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 2a &= 1 \\ 2a+2b &= -2 \\ b+2c &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{2} \\ c &= \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\}$.

12. • Soit $(H) : \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y'(x) + \tan(x)y(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{\ln(|\cos(x)|)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \longmapsto \lambda\cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$ où λ est une fonction dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y'(x) + \tan(x)y(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x) + \tan(x)\cos(x)\lambda(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} + 1 & \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lambda'(x) &= 2\sin(x) + 1 \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lambda(x) &= -2\cos(x) + x + c \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y(x) &= c\cos(x) + x\cos(x) - 2\cos^2(x).\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda\cos(x) + x\cos(x) - 2\cos^2(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Procédons par analyse-synthèse.

•**Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout réel $x, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(x) + f(0) + f(1)$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) + f'(x) = 0$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda e^{-x}$ donc en primitivant, on obtient l'existence de deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout réel $x, f(x) = \mu - \lambda e^{-x}$.
Ainsi, $f(0) = \mu - \lambda$ et $f(1) = \mu - \lambda e^{-1}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) \Leftrightarrow \mu = 2\mu - \lambda(1 + e^{-1}) \Leftrightarrow \mu = \lambda(1 + e^{-1})$$

d'où pour tout réel $x, f(x) = \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x})$.

•**Synthèse :** Supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel $x, f(x) = \lambda(1+e^{-1} - e^{-x})$.
On a alors pour tout réel $x, f'(x) = \lambda e^{-x}$.
Ainsi, pour tout réel $x, f(x) + f'(x) = \lambda(1 + e^{-1})$.
Or, $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1} - 1 + 1 + e^{-1} - e^{-1}) = \lambda(1 + e^{-1})$.
On a donc bien pour tout réel $x, f(x) + f'(x) = f(0) + f(1)$.
Finalement, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout réel $x, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ sont les fonctions $\{f : x \longmapsto \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x}), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4

1. • Résolvons (E) sur $]0, +\infty[$.
   On considère alors l'équation $(E') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = x^2$.
   Soit $(H') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = 0$.
   Alors $\mathcal{S}_{H'} = \{y : x \longmapsto \lambda e^{-x+2\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \longmapsto \lambda x^2 e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   On remarque que $x \longmapsto x^2$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

   $$\mathcal{S}_{E'} = \{y : x \longmapsto \lambda x^2 e^{-x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   • Résolvons (E) sur $]-\infty, 0[$.
   On considère alors l'équation $(E'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = -x^2$.
   Soit $(H'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = 0$.
   Alors $\mathcal{S}_{H''} = \{y : x \longmapsto \mu e^{x-2\ln(x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \longmapsto \mu \dfrac{e^x}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   On cherche une solution particulière de (E'') sur $\mathbb{R}_-^*$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)\dfrac{e^x}{x^2}$ où $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.
   On a alors les équivalences

   $$\begin{aligned} \forall x < 0, y'(x) + \left(\frac{2}{x} - 1\right) y(x) &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x)\frac{e^x}{x^2} + \lambda(x)\frac{e^x}{x^2} - 2\lambda(x)\frac{e^x}{x^3} + 2\lambda(x)\frac{e^x}{x^3} - \lambda(x)\frac{e^x}{x^2} &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) = -x^4 e^{-x}. \end{aligned}$$

   On cherche une primitive λ sous la forme $\lambda(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + t)e^{-x}$ où $(a, b, c, d, t) \in \mathbb{R}^5$.

On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \forall x<0, \lambda'(x) & = & -x^4e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x<0, (4ax^3+3bx^2+2cx+d-ax^4-bx^3-cx^2-dx-t)e^{-x} & = & -x^4e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x<0, -ax^4+(4a-b)x^3+(3b-c)x^2+(2c-d)x+d-t & = & -x^4 \end{array}$$

d'où par identification

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a & = & -1 \\ 4a-b & = & 0 \\ 3b-c & = & 0 \\ 2c-d & = & 0 \\ d-t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 4 \\ c & = & 12 \\ d & = & 24 \\ t & = & 24 \end{array}\right.$$

donc on peut considérer $\forall x<0, \lambda(x) = (x^4+4x^3+12x^2+24x+24)e^{-x}$.
Ainsi, pour tout $x<0, y(x) = x^2+4x+12+\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{x^2}$.
Finalement, $\mathcal{S}_{E''} = \{y : x \longmapsto \mu\dfrac{e^x}{x^2}+x^2+4x+12+\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit y dérivable sur $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall x>0, y(x) & = & \lambda x^2e^{-x}+x^2 \\ y(0) & = & 0 \\ \exists\mu\in\mathbb{R}, \forall x<0, y(x) & = & \mu\dfrac{e^x}{x^2}+x^2+4x+12+\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{x^2}. \end{array}\right.$$

Puisque y est dérivable sur $\mathbb{R}$, a fortiori y est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0. On doit donc avoir $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = y(0) = 0$.
On a bien $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$.
Cherchons $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$.
Faisons un développement limité de y en 0.
On a

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & \mu\dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}+x^2+4x+12+\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{x^2} \\ & = & \dfrac{\mu+24}{x^2}+\dfrac{\mu+24}{x}+\dfrac{\mu+24}{2}+o(1)+4x+x^2 \\ & = & \dfrac{\mu+24}{x^2}+\dfrac{\mu+24}{x}+\dfrac{\mu+24}{2}+o(1). \end{array}$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$ si et seulement si $\mu = -24$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions y telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall x\geqslant 0, y(x) & = & \lambda x^2e^{-x}+x^2 \\ \forall x<0, y(x) & = & -24\dfrac{e^x}{x^2}+x^2+4x+12+\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{x^2}. \end{array}\right.$$

Exercice 5

1. On a pour équation caractéristique $(EC) : r^2+8r+15=0 \Leftrightarrow (r+3)(r+5)=0$.
Ainsi, $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-3t}+\mu e^{-5t}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

2. • Soit $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$.
L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 6r + 9 = 0$ dont le discriminant est nul. On a donc une racine double $r = 3$ donc $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
• On remarque que la fonction constante égale à $\dfrac{1}{3}$ est une solution particulière de $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3$, donc finalement l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}_E = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t} + \dfrac{1}{3}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \lambda e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} + \mu. \end{aligned}$$

4. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = 0$.
L'équation caractéristique est $(EC) : r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-2) = 0$ donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• On cherche une solution particulière de la forme $y : x \longmapsto e^x\,(a\cos(x) + b\sin(x))$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = e^x(a\cos(x) + b\sin(x) - a\sin(x) + b\cos(x)) = e^x((a+b)\cos(x) + (b-a)\sin(x))$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^x((a+b)\cos(x) + (b-a)\sin(x) - (a+b)\sin(x) + (b-a)\cos(x)) \\ &= e^x(2b\cos(x) - 2a\sin(x)). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) &= e^x\cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x((2b-4a)\cos(x) + (-2a-4b)\sin(x)) &= e^x\cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2b-4a)\cos(x) + (-2a-4b)\sin(x) = \cos(x)&. \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $-2a - 4b = 0$ d'où $a = -2b$.
Pour $x = 0$, on trouve $2b - 4a = 1$ d'où $10b = 1$, i.e. $b = \frac{1}{10}$ et $a = -\frac{1}{5}$.
Une solution particulière est donc $y : x \longmapsto e^x(-\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x))$.
Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} + e^x(-\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
5. $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 0$.
On a pour équation caractéristique $(EC) : r^2 - 4r = 0 \Leftrightarrow r(r-4) = 0$ donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto \lambda e^{4x} + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax^2 + bx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2a - 4(2ax + b) = 8x - 16 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -8ax + 2a - 4b = 8x - 16 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} -8a &=& 8 \\ 2a - 4b &=& -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

On a donc pour solution particulière $y(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x$.
Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda e^{4x} + \mu - x^2 + \frac{7}{2}x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$.
On considère l'équation caractéristique $(EC) : r^2 + 2r + 2 = 0$.
Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc les racines sont $r_1 = \dfrac{-2-2i}{2} = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.
Les solutions de (H) sont donc $\mathcal{S}_H = \{y : x \longmapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = (ax + b)e^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = e^x(ax + a + b)$ et $y''(x) = e^x(ax + 2a + b)$.
On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^x \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x(5ax + 4a + 5b) = 3xe^x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, 5ax + 4a + 5b = 3x. \end{aligned}$$
Par identification, on obtient
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5a & = & 3 \\ 4a + 5b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{3}{5} \\ b & = & -\frac{4a}{5} = -\frac{12}{25} \end{array} \right.$$
Ainsi, la fonction $y : x \longmapsto (\frac{3}{5}x - \frac{12}{25})e^x$ est une solution particulière de (E) donc
$$\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \left(\frac{3}{5}x - \frac{12}{25}\right) e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

7. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, z(x) = y'(x)$.
Alors $(E) \Leftrightarrow (E') : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \dfrac{2x}{1+x^2} z(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \dfrac{2x}{1+x^2} z(x) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_H = \{z : x \longmapsto \lambda e^{-\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{z : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Cherchons une solution particulière de (E') grâce à la méthode de variation de la constante, i.e. sous la forme $z(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2} z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \lambda(x)\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) &= 2 \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) &= 2x + c \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) &= \frac{2x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2} \end{aligned}$$
donc $\mathcal{S}_{E'} = \left\{z : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2} + \dfrac{2x}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Or, y est solution de (E) si et seulement si y' est solution de (E') donc y est solution de (E) si et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu.$$
Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \longmapsto \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 6

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x)$.
Puisque la fonction $x \mapsto f(2-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(2-x) = -f(2-(2-x)) = -f(x),$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0$.
L'équation caracctéristique associée à cette équation linéaire homogène d'ordre deux à cœfficients constants est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont i et $-i$.
On en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel $x, f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.
Il en découle que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mu \cos(x) - \lambda \sin(x)$.
On a alors l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu \cos(x) - \lambda \sin(x) = \lambda \cos(2-x) + \mu \sin(2-x).$$

Pour $x = 0$, on obtient $\mu = \lambda \cos(2) + \mu \sin(2)$ d'où $\mu = \dfrac{\lambda \cos(2)}{1-\sin(2)}$ (on a bien $\sin(2) \neq 1$).
Pour $x = 2$, on obtient $\mu \cos(2) - \lambda \sin(2) = \lambda$ d'où $\lambda = \dfrac{\mu \cos(2)}{1+\sin(2)}$ (on a bien $\sin(2) \neq -1$).
Or, si $\mu = \dfrac{\lambda \cos(2)}{1-\sin(2)}$, on a bien $\dfrac{\mu \cos(2)}{1+\sin(2)} = \dfrac{\lambda \cos^2(2)}{1-\sin^2(2)} = \lambda$, ce qui signifie qu'on ne pourra pas déterminer λ de façon unique.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \left(\cos(x) + \dfrac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \sin(x)\right)$.

•**Synthèse :** Supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel x, $f(x) = \lambda \left(\cos(x) + \dfrac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \sin(x)\right)$.
On a alors pour tout réel $x, f'(x) = \lambda \left(-\sin(x) + \dfrac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \cos(x)\right)$.
Par ailleurs, pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
f(2-x) &= \lambda \left(\cos(2-x) + \frac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \sin(2-x)\right) \\
&= \lambda \left(\cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1-\sin(2)}(\sin(2)\cos(x) - \cos(2)\sin(x)\right) \\
&= \frac{\lambda}{1-\sin(2)} \left((\cos(2) - \cos(2)\sin(2) + \cos(2)\sin(2))\cos(x) + (\sin(2) - \sin^2(2) - \cos^2(2))\sin(x)\right) \\
&= \frac{\lambda}{1-\sin(2)} \left(\cos(2)\cos(x) + (\sin(2)-1)\sin(x)\right) \\
&= \lambda \left(-\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \cos(x)\right) \\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x)$ est

$$\left\{ f : x \longmapsto \lambda \left(\cos(x) + \frac{\cos(2)}{1-\sin(2)} \sin(x)\right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 7

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Autrement dit, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout

$x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.
L'équation qu'on doit résoudre s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3F(x) = 2xF'(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) - \frac{3}{2x}F(x) = 0 \,\text{et}\, F(0) = 0.$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $x > 0, F(x) = \lambda e^{\frac{3}{2}\ln(x)} = \lambda x^{\frac{3}{2}}$ et pour tout $x < 0, F(x) = \mu e^{\frac{3}{2}\ln(-x)} = \mu(-x)^{\frac{3}{2}}$.
On a bien $0 = \lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$.
On en déduit que pour tout $x > 0, f(x) = F'(x) = \dfrac{3}{2}\lambda\sqrt{x}$ et pour tout $x < 0, f(x) = F'(x) = -\dfrac{3}{2}\mu\sqrt{-x}$.
On a bien dans ce cas $0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Finalement, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles qu'on ait pour tout réel $x, 3\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2xf(x)$ sont les fonctions f telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant 0, f(x) & = \dfrac{3}{2}\lambda\sqrt{x} \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, f(x) & = -\dfrac{3}{2}\mu\sqrt{-x}. \end{cases}$$

Exercice 8

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les racines sont -1 et 1 donc les solutions sont
$$\left\{z : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
2. Posons pour tout réel $t, z(t) = y''(t) - y(t)$.
On a pour tout réel $t, z''(t) = y^{(4)}(t) - y''(t)$.
On obtient l'équivalence :
$$\forall t \in \mathbb{R}, y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = 0.$$
D'après la première question, ceci équivaut à l'existence de deux réels λ et μ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}. \quad (E)$$
• Considérons l'équation homogène associée
$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = 0. \quad (H)$$
D'après la première question, $\mathcal{S}_H = \left\{y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
• Cherchons une solution particulière à l'équation
$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \quad (E_1)$$
sous la forme $y(t) = ate^t$ où $a \in \mathbb{R}$.
On a pour tout réel $t, y'(t) = e^t(at + a)$ et $y''(t) = e^t(at + 2a)$.
On a donc l'équivalence :
$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2ae^t = \lambda e^t.$$

Pour $t=0$, on obtient $2a=\lambda$ d'où $a=\dfrac{\lambda}{2}$, i.e. pour tout réel $t, y(t)=\dfrac{\lambda t}{2}e^t$ est une solution particulière de (E_1).

• Cherchons une solution particulière à l'équation

$$\forall t\in\mathbb{R}, y''(t)-y(t)=\mu e^{-t} \quad (E_2)$$

sous la forme $y(t)=bte^{-t}$ où $b\in\mathbb{R}$.
On a pour tout réel $t, y'(t)=e^{-t}(-bt+b)$ et $y''(t)=e^{-t}(bt-b-b)=(bt-2b)e^{-t}$.
On a donc l'équivalence :

$$\forall t\in\mathbb{R}, y''(t)-y(t)=\mu e^{-t} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, -2be^{-t}=\mu e^{-t}.$$

Pour $t=0$, on obtient $-2b=\mu$ d'où $b=-\dfrac{\mu}{2}$, i.e. pour tout réel $t, y(t)=-\dfrac{\mu t}{2}e^t$ est une solution particulière de (E_2).
Par principe de superposition, la fonction $t\longmapsto \dfrac{\lambda t}{2}e^t-\dfrac{\mu t}{2}e^{-t}$ est une solution particulière de (E).
Finalement, l'ensemble des solutions de (E), et donc par équivalence, de l'équation de départ, est

$$\left\{y : t\longmapsto \alpha e^t+\beta e^{-t}+\frac{\lambda t}{2}e^t-\frac{\mu t}{2}e^{-t}, (\alpha,\beta,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^4\right\}.$$

Exercice 9

1. Supposons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors g l'est également et on a pour tout réel $x, f(x)=g(x)(1+e^x)$ d'où $f'(x)=g'(x)(1+e^x)+g(x)e^x$ et

   $$f''(x)=g''(x)(1+e^x)+g'(x)e^x+g'(x)e^x+g(x)e^x=g''(x)(1+e^x)+2g'(x)e^x+g(x)e^x.$$

   On a alors les équivalences

   $$\begin{aligned}
   & \forall x\in\mathbb{R}, (1+e^x)^2f''(x)-2e^x(1+e^x)f'(x)-(3e^x+1)f(x)=0\\
   \Leftrightarrow\ & \forall x\in\mathbb{R}, (1+e^x)^3g''(x)+((1+e^x)e^x-2e^{2x}-3e^x-1)(1+e^x)g(x)=0\\
   \Leftrightarrow\ & \forall x\in\mathbb{R}, (1+e^x)^2g''(x)+(-e^{2x}-2e^x-1)g(x)=0\\
   \Leftrightarrow\ & \forall x\in\mathbb{R}, (1+e^x)^2g''(x)-(1+e^x)^2g(x)=0\\
   \Leftrightarrow\ & \forall x\in\mathbb{R}, g''(x)-g(x)=0
   \end{aligned}$$

   ce qui prouve que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (H).
2. $\mathcal{S}_H=\{y : x\longmapsto \lambda e^x+\mu e^{-x}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.
3. $\mathcal{S}_E=\{f : x\longmapsto (\lambda e^x+\mu e^{-x})(1+e^x), (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice 10

1. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre :

   $$y(x)=C\,\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}=C\,\mathrm{e}^{2x},\quad C\in\mathbb{R}.$$

2. Avec la condition initiale $y(0)=3$, on obtient

   $$y(0)=C\,\mathrm{e}^0=C=3.$$

   Donc la solution vérifiant $y(0)=3$ est

   $$y(x)=3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

3. Pour cette solution, on a $3\,\mathrm{e}^{2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est donc strictement positive. Lorsque $x \to +\infty$, on a $\mathrm{e}^{2x} \to +\infty$, donc
$$y(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x} \to +\infty.$$

Exercice 11

On considère l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Équation homogène :
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0.$$
On peut réécrire
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y,$$
qui est de la même forme que l'exercice précédent. On obtient
$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. On utilise la méthode de variations de la constante. On pose
$$y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2x}.$$
Y_p solution de (E) si :
$$C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}.$$
On a donc :
$$C'(x)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}$$
soit
$$C'(x) = \mathrm{e}^{x}$$
En intégrant, on obtient :
$$C(x) = \mathrm{e}^{x}$$
d'où
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}$$

3. L'ensemble des solutions est donc
$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Condition $y(0) = 0$:
$$y(0) = 1 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -1.$$
La solution demandée est donc
$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

Exercice 12

[Refroidissement de Newton] On modélise $T(t)$ par

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\big(T(t) - T_{\text{ext}}\big), \quad k > 0.$$

1. Si $T(t) > T_{\text{ext}}$, alors $T(t) - T_{\text{ext}} > 0$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\big(T - T_{\text{ext}}\big) < 0,$$

la température décroît : l'objet se refroidit. Si $T(t) < T_{\text{ext}}$, alors $T - T_{\text{ext}} < 0$, donc $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} > 0$: l'objet se réchauffe. Le coefficient $k > 0$ mesure la rapidité du retour vers l'équilibre.

2. On considère d'abord l'équation homogène. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On la résout classiquement :

$$T(t) = C\,\mathrm{e}^{\int -k\,\mathrm{d}t} = C\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

On note cette solution homogène

$$T_h(t) = C\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + kT = kT_{\text{ext}}$$

sous la forme

$$T_p(t) = C$$

car le second membre est constant.
On obtient

$$kC = kT_{\text{ext}}$$

soit

$$C = T_{\text{ext}}$$

La solution générale s'écrit alors

$$T(t) = T_{\text{ext}} + C\,\mathrm{e}^{-kt} = \big(T_{\text{ext}}\,\mathrm{e}^{kt} + C\big)\mathrm{e}^{-kt}.$$

3. Avec $T(0) = T_0$:

$$T(0) = T_{\text{ext}} + C\,\mathrm{e}^{0} = T_{\text{ext}} + C = T_0 \quad \Rightarrow \quad C = T_0 - T_{\text{ext}}.$$

Donc

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

4. Lorsque $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$, donc

$$T(t) \to T_{\text{ext}}.$$

La température se stabilise à celle du milieu.

Exercice 13

[Cinétique chimique simple] On considère

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -kC(t) + a, \quad k > 0,\ a \geq 0.$$

1. On écrit
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + kC = a.$$
C'est une équation linéaire du premier ordre.
On résout l'équation homogène :
$$C_h(t) = K\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$
Or la fonction C_p définie par :
$$C_p(t) = \frac{a}{k}$$
est clairement une solution particulière de l'équation différentielle complète donc la solution générale s'écrit :
$$C(t) = \frac{a}{k} + K\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$
2. Avec $C(0) = C_0$:
$$C(0) = \frac{a}{k} + K = C_0 \quad \Rightarrow \quad K = C_0 - \frac{a}{k}.$$
D'où
$$C(t) = \frac{a}{k} + \left(C_0 - \frac{a}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$
3. Lorsque $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$, donc
$$C(t) \to \frac{a}{k}.$$
La concentration tend vers la valeur d'équilibre $C_\infty = a/k$.
4. Influence des paramètres :
   — Plus a est grand, plus la concentration d'équilibre a/k est élevée (apport plus important).
   — Plus k est grand, plus a/k est petit : la consommation (proportionnelle à k) est plus forte, ce qui réduit la concentration d'équilibre.

Exercice 14

[Oscillateur harmonique] On considère

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx(t) = 0, \quad m > 0,\ k > 0.$$

1. On divise par m :
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$
On pose
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\omega > 0),$$
ce qui donne
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0.$$

2. L'équation caractéristique associée est
$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\omega.$$
La solution générale est donc
$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3. Avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$:
On a
$$x(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0.$$
Puis
$$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t),$$
donc
$$x'(0) = B\omega = v_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$
La solution cherchée est donc
$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

4. La solution est une combinaison de fonctions trigonométriques de pulsation ω ; elle est donc périodique de période
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$
Le mouvement est un oscillateur harmonique de période T.