Corrigé du devoir maison n°5
A rendre pour le mercredi 19 novembre 2025

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Déterminer la partie paire et la partie impaire de la fonction f.

Pour tout réel x, on a :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Alors :

$$f(x) + f(-x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

D'où :

$$f_{\text{paire}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}, \quad f_{\text{impaire}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{2(e^{2x} + 1)}.$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{2x} - 1}{2(e^{2x} + 1)}.$$

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

La fonction est la composée et le quotient de fonctions exponentielles, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons

$$u(x) = e^x, \qquad v(x) = e^x + e^{-x},$$

donc $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x - e^{-x}$. Par la règle du quotient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{e^x\left(e^x + e^{-x}\right) - e^x\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}.$$

Ainsi on obtient la formule suivante :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}}.$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f et calculer ses limites.

Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Calcul des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = 0.$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

4. Montrer que pour tout $y \in]0;1[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in]0,1[$. Résolvons l'équation $\dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}} = y$ d'inconnue x.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{e^x+e^{-x}} = y &\iff e^x = y\big(e^x + e^{-x}\big) = ye^x + ye^{-x} \\
&\iff (1-y)e^x = ye^{-x} \\
&\iff (1-y)e^{2x} = y \\
&\iff e^{2x} = \frac{y}{1-y} \text{ car } 1-y \neq 0 \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \text{ car } 1-y > 0 \text{ et } y > 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $y \in]0,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = y$, à savoir $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

5. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ de bijection réciproque f^{-1} définie pour tout $x \in]0;1[$ par
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Les résultats précédents montrent que f est strictement croissante et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ainsi $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective et sa réciproque est, pour tout $y \in]0,1[$,

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right).}$$

6. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}$$

f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ en tant que quotient et composées de fonction dérivables sur $]0;1[$.
Par la formule de la dérivée du logarithme $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout $x \in]0;1[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{(1-x)\cdot 1 - x\cdot(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{x}{1-x}}$$

Donc

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{x}$$

D'où le résultat final :

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}} \quad \text{pour tout } x \in]0,1[.$$

Autre méthode : on aurait aussi pu utiliser la formule de la dérivée de la réciproque

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}\right)^2}{2}.$$

soit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right)^2}{2} = \frac{1}{2x(1-x)}.$$