## Liste d'exercices n°11 — Suites réelles

**Exercice 1.** Soient $r$ et $q$ deux réels. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$.
Expliciter les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants.

1. On suppose que $u_3 = 6$ et $u_7 = 9$.
2. On suppose que $v_3 = 6$ et $v_{14} = 16$.
3. On suppose que $u_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k = 2$.

**Exercice 2.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{-1}{x+2}$, d'inconnue $x$ réelle, possède exactement une solution, que l'on notera $c$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq c$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : pour tout entier naturel $n$,
$$v_n = \frac{1}{u_n - c}.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Expliciter la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

**Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Donner l'expression de $u_n$ pour tout entier naturel $n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

**Exercice 4.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 1. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Ecrire un programme en Python permettant de calculer le rang $n$ à partir duquel le terme général de la suite $(u_n)$ dépasse le seuil $A$.

**Exercice 5.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier $n$ non nul par

$$nu_n + u_{n-1} - \frac{2}{(n-1)!} = 0 \text{ et } u_0 = -1.$$

1. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n$ par $v_n = n!u_n$.
2. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 6.** Soit $d = \dfrac{41}{333}$.

1. Calculer à la main $d$ à $10^{-9}$ près.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0{,}123 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 10^{-3}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Calculer $u_0 + u_1 + u_2$.
   (b) Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.

3. On considère le programme Python suivant qui calcule le terme général de la suite $(u_n)$ :
   (a) Compléter le programme Python suivant :

```python
def u(n):
    u = 0.123
    for k in range(n):
        u = ..................
    return u
```

   (b) Que renvoient `u(1)` et `u(2)` ?

4. Soit $n \in \mathbb{R}$. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n = d(1 - 10^{-3} \times (10^{-3})^n)$$

   (b) En déduire la limite de $(S_n)$.
   (c) En utilisant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, proposer une nouvelle écriture de $d$.

5. On considère le programme Python suivant qui calcule le terme général de la suite $(S_n)$ :
   (a) Compléter le programme suivant :

```python
def S(n):
    S = 0
    u = 0.123
    for k in range(n):
        S = ...................
        u = ...................
    return S
```

   (b) Que renvoie `S(100)` ?

**Exercice 7.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

**Exercice 8.** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}, \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n < 3$.
4. On définit la suite $(v_n)$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ puis en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 9.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer $u_n$ pour tout entier naturel $n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 10.** Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = -1, u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 4, u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

**Exercice 11.** Expliciter les suites définies par :

1. $u_0 = e^3$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
2. $v_0 = e^2$ et, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
3. $w_0 = 11$, $w_1 = 25$ et, pour tout entier naturel $n$, $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$.
4. $x_0 = e^{11}$, $x_1 = e^{25}$ et, pour tout entier naturel $n$, $x_{n+2}^2 = x_{n+1}^3 x_n^2$.