12
Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1 Généralités sur les systèmes linéaires

12.1.1 Systèmes linéaires de n équations à p inconnues

Définition 1

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$.

• On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ un système de la forme

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,j}x_j & + & \dots & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & \dots & + & a_{i,j}x_j & + & \dots & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,j}x_j & + & \dots & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

qui peut s'écrire de manière condensée

$$\left\{\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j & = & b_1 \\ \vdots & & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j & = & b_i \\ \vdots & & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j}x_j & = & b_n \end{array}\right.$$

Résoudre un tel système revient à trouver tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui satisfont ces n équations.
On dit que le système est homogène si tous les seconds membres sont nuls, c'est à dire si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, b_i = 0$.

Définition 2: Systèmes compatibles

• On dit qu'un système linéaire est compatible s'il possède des solutions, incompatible dans le cas contraire.
• Un système linéaire est dit de Cramer si $n = p$ et s'il possède une unique solution.

Remarque 1. Tout système linéaire homogène est compatible puisque le p-uplet nul $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$ en est toujours solution. Mais il possède peut-être d'autres solutions.

Exemple 1. • Considérons le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Le triplet $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est solution du système. Mais ce n'est pas la seule solution. En effet, on constate que pour tout réel t, le triplet $(x, y, z) = (t, t, 0)$ est solution donc le système possède une infinité de solutions.

• Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ -x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ est incompatible puisque $x+y = 1 \Rightarrow -x-y = -1 \neq 0$.

• Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$ est un système de Cramer : en effet, en sommant les deux lignes du système, on trouve $x = 0$ et on en déduit que $y = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est $(x, y) = (0, 1)$.

12.1.2 Opérations élémentaires

Définition 3: Opérations élémentaires

Soit (S) un système linéaire. On appelle opérations élémentaires sur les lignes du système (S) les trois types d'opérations suivants :
• échange de la ligne L_i et de la ligne L_j, que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;
• si $i \neq j$, pour tout réel λ, ajout de la ligne λL_j à la ligne L_i, que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$;
• pour tout réel $\lambda \neq 0$, multiplication de L_i par λ, que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Remarque 2. Soit (S) un système linéaire auquel on applique une opération élémentaire afin d'obtenir un nouveau système (S'). On peut réobtenir (S) en appliquant une opération élémentaire à (S'). Autrement dit, pour défaire une opération élémentaire, il suffit de refaire une opération élémentaire.

• Si on applique l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ au système (S), il faut réappliquer la même opération au système (S') obtenu pour réobtenir (S).

• Si on applique l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ au système (S), il faut appliquer l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ au système (S') obtenu pour réobtenir (S).

• Si on applique l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (avec $\lambda \neq 0$) au système (S), il faut appliquer l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ au système (S') obtenu pour réobtenir (S).

Définition 4: Systèmes équivalents

Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Remarque 3. On a donc montré dans la remarque précédente que c'est une notion symétrique : si on peut passer d'un système à un autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut le faire dans l'autre sens. Ceci justifie la définition de deux systèmes équivalents.

Proposition 1

Deux systèmes équivalents possèdent le même ensemble de solutions.

Démonstration. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. Vérifions que chacune des opérations élémentaires préserve l'ensemble des solutions d'un système.

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution du système (S), alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k = b_i \text{ et } \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}x_k = b_j,$$

ce qui signifie que $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de l'équation en ligne L_i et en ligne L_j.

Clairement, $(x_1, \dots, x_p)$ restera solution du système si on échange les lignes L_i et L_j.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\sum_{k=1}^{p}(a_{i,k} + \lambda a_{j,k})x_k = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k + \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}x_k = b_i + \lambda b_j,$$

$(x_1, \dots, x_p)$ est toujours solution du système obtenu en ajoutant λL_j à la ligne L_i.

Enfin, si $\lambda \neq 0$, alors

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda a_{i,k}x_k = \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k = \lambda b_i$$

donc $(x_1, \dots, x_p)$ est toujours solution du système obtenu en multipliant L_i par λ.

Ainsi, si on obtient un système (S') en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes du système (S), les solutions de (S) sont également solutions de (S').

Réciproquement, on a montré qu'on pouvait réobtenir (S) à partir de (S') en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, donc les solutions de (S') sont également solutions de (S).

On en conclut que deux systèmes équivalents admettent les mêmes solutions. ■

Il reste à voir une méthode de résolution efficace pour les systèmes linéaires : c'est l'objet de la section suivante.

12.2 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss

12.2.1 Systèmes échelonnés

Définition 5: Systèmes échelonnés

Un système est dit échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes :
• si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul ;
• dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier cœfficient non nul à partir de la gauche croît strictement.
On appelle pivot le premier cœfficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul.

Exemple 2. Le système suivant est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{2}x & + & y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ & & \boxed{-5}y & & & + & t & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque l'existence d'un pivot dans les deux premières lignes : 2 et -5.

Le système suivant est également échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
\boxed{2}x & + & y & - & z & - & 3t & = & 3\\
 & & \boxed{-5}y & & & + & t & = & -1\\
 & & & & & & \boxed{-3}t & = & 1
\end{array}\right.$$

Le système suivant n'est pas échelonné

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
3x & - & y & + & 2z & = & 4\\
 & & y & - & 2z & = & -2\\
 & & -y & + & 3z & = & -1
\end{array}\right.$$

Pour obtenir un système échelonné à partir d'un système linéaire quelconque, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss.

12.2.2 Algorithme du pivot de Gauss

Soit (S) un système linéaire à n équations et à p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$.

L'algortihme du pivot de Gauss permet d'obtenir un système échelonné en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de (S), qui sera plus facile à résoudre. Le principe de cette méthode réside en la création de pivots à chaque étape.

Etape 1 : Il existe nécessairement un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que le cœfficient devant x_1 en ligne i est non nul (sinon le système ne serait pas une équation à p inconnues !). Quitte à appliquer l'opération $L_1 \leftrightarrow L_i$, on peut supposer que le cœfficient $a_{1,1}$ devant x_1 est un réel non nul.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ (ou $L_i \leftarrow a_{1,1}L_i - a_{i,1}L_1$). Ce faisant, on a créé un premier pivot, $a_{1,1}$.

Etape 2 : Soit i le plus petit indice strictement supérieur à 1 tel qu'un terme x_i apparaisse encore dans le système (en dehors de la ligne 1). Quitte à procéder à un nouvel échange de lignes, on peut faire en sorte que le cœfficient devant x_i en deuxième ligne soit non nul. En faisant comme à la première étape, on annule tous les autres termes x_i en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

En répétant ces deux étapes autant que nécessaire, on obtient nécessairement un système échelonné.

Exemple 3. Echelonnons le système suivant en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & y & - & z & = & 3\\
-x & - & 5y & + & z & = & -1\\
4x & - & 2y & - & 3z & = & 0
\end{array}\right.
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\iff}}
\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & y & - & z & = & 3\\
 & - & 9y & + & z & = & 1\\
 & - & 4y & - & z & = & -6
\end{array}\right.
\underset{L_3 \leftarrow 9L_3 - 4L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 9L_1 + L_2}{\iff}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
18x & + & & - & 8z & = & 28\\
 & - & 9y & + & z & = & 1\\
 & & & - & 13z & = & -58
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{rcl}
x & = & \frac{46}{13}\\
y & = & \frac{5}{13}\\
z & = & \frac{58}{13}
\end{array}\right.$$

12.3 Ensemble des solutions d'un système linéaire

12.3.1 Rang d'un système

Définition 6: Rang d'un système échelonné

Soit (S) un système échelonné.
On appelle rang du système (S) son nombre de pivots.

Exemple 4. Reprenons les deux systèmes échelonnés de l'exemple 2. Le premier système est de rang 2 tandis que le deuxième est de rang 3.

Définition 7: Rang d'un système

Soit (S) un système.
On appelle rang du système (S) le rang de tout système échelonné équivalent.
Autrement dit, c'est le nombre de pivots du système échelonné obtenu après avoir effecuté l'algorithme du pivot de Gauss sur le système (S).

Remarque 4. On admet pour l'instant que deux systèmes échelonnés équivalents ont même rang. Nous le démontrerons dans le cours d'algèbre linéaire.

Exemple 5. Le système de l'exemple 3 est de rang 3.

12.3.2 Résolution d'un système

Après avoir échelonné un système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient un système plus simple à résoudre qui peut prendre différentes formes :

- un système triangulaire de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{a_{1,1}}x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{2,2}}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & \boxed{a_{n-1,n-1}}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & \boxed{a_{n,n}}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, a_{i,i} \neq 0$. Ce cas ne peut se produire que si $p = n$.

On obtient alors $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$, puis en injectant dans l'avant dernière équation et en divisant par $a_{n-1,n-1}$ qui est non nul, on trouve x_{n-1}. En remontant ainsi de suite, on obtient une unique solution $(x_1, \dots x_n)$.

- un système trapézoïdal de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{a_{1,1}}x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & \boxed{a_{r,r}}x_r & +\dots & + & a_{r,p}x_p = & b_r \\
 & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

où le rang du système vérifie nécessairement $r \leqslant \min(n,p)$.

1. S'il existe un indice $i \in [\![r+1, n]\!]$ tel que $b_i \neq 0$, alors le système est incompatible et n'admet aucune solution.
2. Si pour tout $i \in [\![r+1, n]\!], b_i = 0$ alors le système est compatible (il l'est également si $r = n$ car dans ce cas, on n'a pas de membres de gauches nuls) et se résout en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires (qui sont des variables libres).
   (a) Si $r = p$, on est ramené au cas précédent et on obtient une unique solution.
   (b) Si $r < p$, on exprime x_r en fonction des x_i pour $i \in [\![r+1, p]\!]$, puis on injecte dans l'équation précédente. On exprime ensuite x_{r-1} en fonction des inconnues secondaires que sont $(x_{r+1}, \dots, x_p)$ et ainsi de suite.
   A la fin, les inconnues principales $(x_1, \dots, x_r)$ s'expriment en fonction des inconnues secondaires $(x_{r+1}, \dots, x_p)$ qui sont libres : il y a donc une infinité de solutions.

On peut résumer la situation dans le théorème suivant :

Théorème 1: Nombre de solutions d'un système linéaire

Un système linéaire admet zéro, une seule ou une infinité de solutions.

Exemple 6. • Considérons le système

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -1. \end{array}\right.$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner le système :

$$(S) \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & -1-z \end{array}\right.$$

où $z \in \mathbb{R}$ est une variable libre. On obtient donc une infinité de solutions que sont

$$\{(1, -1-z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

• Considérons le système

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1. \end{array}\right.$$

En l'échelonnant de la même manière, on obtient

$$(S) \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

qui est un système incompatible. Donc le système (S) n'admet aucune solution.

12.3.3 Intersection de droites et de plans

• Plaçons-nous dans le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Toute droite (D) dans ce plan admet une équation de la forme $ax + by = c$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les points (x, y) qui appartiennent à cette droite vérifient cette équation. Si on considère une deuxième droite (D') d'équation $a'x + b'y = c'$, alors les points d'intersection des deux droites sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c'. \end{array}\right.$$

Si les droites (D) et (D') sont parallèles non confondues, le système n'admet aucune solution.

Si les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un unique point et le système admet une unique solution.

Si les droites (D) et (D') sont confondues, alors le sytème admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide d'une variable libre.

Exemple 7. Les deux derniers exemples de l'exemple 1 représentent les points d'intersection de deux droites parallèles non confondues et de deux droites non parallèles respectivement.

Enfin, le système suivant représente les points d'intersection de deux droites confondues :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & -2 \\ -2x & - & 2y & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + y = -2 \Leftrightarrow y = -2 - x$$

donc le système admet une infinité de solutions que sont les points $\{(x, -2-x), x \in \mathbb{R}\}$, c'est à dire les points situés sur la droite d'équation $y = -2 - x$.

• Plaçons-nous dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tout plan (P) dans l'espace admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et les points (x, y, z) qui appartiennent à ce plan vérifient cette équation. Si on considère deux autres plans (P') et (P'') d'équations respectives $a'x + b'y + c'z = d'$ et $a''x + b''y + c''z = d''$, alors les points d'intersection des trois plans sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = & d''. \end{array}\right.$$

On a plusieurs cas :

1. Si (P) et (P') sont parallèles non confondus, alors l'intersection de (P) et (P') est vide donc le système n'a aucune solution.
2. Si (P) et (P'), ne sont pas parallèles, ils s'intersectent selon une droite (D). Il reste à étudier l'intersection de (D) et (P'') :
   (a) Si (D) et (P'') sont parallèles et (D) n'est pas incluse dans (P''), leur intersection est vide donc le système n'admet aucune solution.
   (b) Si (D) est incluse dans (P''), alors leur intersection est égale à (D). Il y a donc une infinité de solutions au système, qui s'expriment en fonction d'une variable libre.
   (c) Si (D) et (P'') ne sont pas parallèles, alors leur intersection est un point et le système admet une unique solution.
3. Si (P) et (P') sont confondus, leur intersection est égale à (P) et il reste à étudier l'intersection de (P) avec (P'').
   (a) Si (P) et (P'') sont parallèles non confondus, alors leur intersection est vide et le système n'admet aucune solution.
   (b) Si (P) et (P'') sont confondus, alors leur intersection est égale à (P) et le système admet une infinité de solutions qui s'expriment en fonction de deux variables libres.
   (c) Si (P) et (P'') ne sont pas confondus, alors leur intersection est une droite (D) et le système admet une infinité de solutions qui s'expriment en fonction d'une variable libre.

Exemple 8. • Considérons les plans (P) et (P') d'équations respectives $x + y + z = 0$ et $x + y + z = 1$. L'intersection de ces deux plans est vide car leurs deux équations forment un système incompatible.

• On a vu dans l'exemple 3 que l'intersection des trois plans d'équations respectives $2x + y - z = 3, -x - 5y + z = -1$ et $4x - 2y - 3z = 0$ était réduite à un point.

• On a vu dans l'exemple 6 que l'intersection des plans d'équations respectives $x + y + z = 0, 2x + y + z = 1$ et $x + 2y + 2z = -1$ est la droite $\{(1, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

En fait, l'intersection des deux plans $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 2z = -1$ est la droite $\{(1, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$ et on constate que cette dernière est incluse dans le plan d'équation $2x + y + z = 1$.

• Considérons les plans $(P), (P')$ et (P'') d'équations respectives $2x + y - 2z = 1, -2x - y + 2z = -1$ et $-4x - 2y + 4z = -2$. Ces trois plans sont confondus donc leur intersection est $(P) = \{(x, 1 - 2x + 2z, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$.