Corrigé de la liste d'exercices n°11 — Suites réelles

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 1.

1. On a $u_7 - u_3 = 4r$ donc $4r = 3$ d'où $r = \frac{3}{4}$.
Or, on a également $u_3 = u_0 + 3r = u_0 + \frac{9}{4}$ donc $u_0 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = \frac{15+3n}{4}$.

2. On a $\frac{v_{14}}{v_3} = q^{11}$ donc $q^{11} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ d'où $q = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{11}}$.
Or, on a également $v_3 = v_0 \times q^3$ donc $v_0 = \frac{v_3}{q^3} = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{n}{11}} = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{n-3}{11}}$.

3. On a $\sum_{k=0}^{100} u_k = 101 \times \frac{u_0 + u_{100}}{2} = 101 \times \frac{1+1+100r}{2} = 101(1+50r)$.
Ainsi, $2 = 101 + 50 \times 101r$, d'où $-99 = 5050r$, i.e. $r = -\frac{99}{5050}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = 1 - \frac{99n}{5050}$.

Exercice 2.

1. On a $x = -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc $c = -1$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.
•Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > -1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > -1$. Montrons que $u_{n+1} > -1$.
On a

$$u_{n+1} + 1 = -\frac{1}{u_n + 2} + 1 = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Puisque $u_n > -1$, on a $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 2 > 1 > 0$ donc $\frac{u_n+1}{u_n+2} > 0$, ce qui montre que $u_{n+1} + 1 > 0$, i.e. $u_{n+1} > -1$.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > -1$, ce qui montre d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$ et assure la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} = 1 + v_n$$
   donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + n = \dfrac{1}{2} + n = \dfrac{2n+1}{2}$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1 = \dfrac{2}{2n+1} - 1 = \dfrac{1-2n}{2n+1}$.
5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\frac{1}{n} - 2}{2 + \frac{1}{n}}$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ donc par quotient, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Exercice 3. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 2l - 1$, i.e. $l = 1$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l = u_n - 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$
donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 - 1)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = 2^n(u_0 - 1) + 1$.
Puisque $2 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.
• Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
• Si $u_0 > 1$, on a $u_0 - 1 > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = +\infty$.
• Si $u_0 < 1$, on a $u_0 - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = -\infty$.

Exercice 4.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 3l + 1$, i.e. $l = -\frac{1}{2}$.
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l = u_n + \frac{1}{2}$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$
   donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n v_0 = 3^n(u_0 + \frac{1}{2}) = 3^n \times \frac{11}{2}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - \frac{1}{2} = 3^n \times \frac{11}{2} - \frac{1}{2}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{11}{2}\sum_{k=0}^{n} 3^k - \frac{n+1}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - \frac{n+1}{2} = \frac{11(3^{n+1} - 1) - 2n - 2}{4}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{11 \times 3^{n+1} - 2n - 13}{4}$.

2.
```python
def seuil(A):
    u = 5
    n = 0
    while u <= A:
        u = 3 * u + 1
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 5.

1. La relation donnée pour $n \geq 1$:
$$nu_n + u_{n-1} - \frac{2}{(n-1)!} = 0$$
devient, en multipliant par $(n-1)!$:
$$n(n-1)!u_n + (n-1)!u_{n-1} - 2 = 0$$
soit
$$n!u_n + (n-1)!u_{n-1} - 2 = 0$$
d'où
$$v_n + v_{n-1} - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_n = 2 - v_{n-1}, \quad n \geq 1.$$
On a donc une suite arithmético-géométrique.

2. On résout $x = 2 - x \Longleftrightarrow x = 1$. Donc $(v_n - 1)$ est géométrique de raison $q = -1$. En effet, pour tout entier naturel n :
$v_n - 1 = 2 - v_{n-1} - 1 = 1 - v_{n-1} = -(v_{n-1} - 1)$.
Donc :
$$v_n - 1 = (v_0 - 1) \times (-1)^n = 2(-1)^{n+1} \Longrightarrow v_n = 1 + 2(-1)^{n+1}$$
Enfin :
$$\boxed{u_n = \frac{v_n}{n!} = \frac{1 + 2(-1)^{n+1}}{n!}.}$$

Exercice 6.

1.
$$\boxed{d \approx 0.123123123 \text{ (à } 10^{-9} \text{ près).}}$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$$u_0 = 0{,}123 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 10^{-3}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Calculons :
   $$u_1 = 10^{-3}u_0, \quad u_2 = (10^{-3})^2 u_0.$$
   Ainsi :
   $$u_0 + u_1 + u_2 = u_0(1 + 10^{-3} + 10^{-6}) = 0.123(1.001001) = 0.123123123.$$
   $$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 = 0.123123123.}$$

(b) La suite (u_n) est une suite **géométrique** de premier terme $u_0 = 0.123$ et de raison $q = 10^{-3}$.

3. **Programme Python calculant** u_n :

```
def u(n):
    u = 0.123
    for k in range(n):
        u = u * 10**(-3)
    return u
```

Ainsi :

$$u(1) = 0.123 \times 10^{-3} = 0.000123, \quad u(2) = 0.000123 \times 10^{-3} = 0.000000123.$$

$$\boxed{u(1) = 0.000123 \quad \text{et} \quad u(2) = 0.000000123.}$$

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{avec } q = 10^{-3}.$$

Or :

$$\frac{u_0}{1-q} = \frac{0.123}{1 - 10^{-3}} = \frac{0.123}{0.999} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} = d.$$

Donc :

$$S_n = d(1 - (10^{-3})^{n+1}) = d(1 - 10^{-3} \times (10^{-3})^n).$$

$$\boxed{S_n = d(1 - 10^{-3} \times (10^{-3})^n).}$$

(b) Comme $0 < 10^{-3} < 1$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = d(1 - 0) = d.$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = d = \frac{41}{333}.}$$

(c) Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = d,$$

donc

$$\boxed{d = \sum_{k=0}^{+\infty} 0.123 \times (10^{-3})^k = 0,123123123123\ldots.}$$

5. (a) **Programme Python calculant S_n :**

```python
def S(n):
    S = 0.0
    u = 0.123
    for k in range(n+1):
        S = S + u
        u = u * 10**(-3)
    return S
```

(b) Les valeurs calculées sont très proches de la limite d :

$$S(100) \approx 0.123123123123\dots$$

Les différences avec d sont négligeables à la précision des calculs numériques.

$$\boxed{S(100) \approx S(1000) \approx 0.123123123.}$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

C'est une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

On factorise :

$$(r-2)(r-3) = 0.$$

Ainsi :

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = 3.$$

La solution générale de la récurrence est :

$$u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n,$$

où A et B sont des constantes réelles.
À partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 3 = A + B, \\ u_1 = 2 = 2A + 3B. \end{cases}$$

On résout ce système :

$$A + B = 3,$$
$$2A + 3B = 2.$$

En multipliant la première équation par 2 et en la soustrayant de la deuxième :

$$(2A + 3B) - 2(A + B) = 2 - 6 \quad \Rightarrow \quad B = -4.$$

Puis :

$$A = 3 - B = 3 - (-4) = 7.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 7 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n.}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (7 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k) = 7 \sum_{k=0}^{n} 2^k - 4 \sum_{k=0}^{n} 3^k.$$

Donc :

$$S_n = 7 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 4 \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}.$$

$$S_n = 7(2^{n+1} - 1) - 2(3^{n+1} - 1).$$

$$S_n = 7 \cdot 2^{n+1} - 7 - 2 \cdot 3^{n+1} + 2.$$

$$\boxed{S_n = 7 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} - 5.}$$

Exercice 8.

1.
$$u_1 = \frac{3 + u_0}{5 - u_0} = \frac{3 + 2}{5 - 2} = \frac{5}{3}, \qquad u_2 = \frac{3 + u_1}{5 - u_1} = \frac{3 + \frac{5}{3}}{5 - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$$

   Donc
$$\boxed{u_1 = \frac{5}{3}, \qquad u_2 = \frac{7}{5}.}$$

2. Calculons $u_{n+1} - 3$:
$$u_{n+1} - 3 = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 3 = \frac{3 + u_n - 3(5 - u_n)}{5 - u_n} = \frac{3 + u_n - 15 + 3u_n}{5 - u_n} = \frac{4u_n - 12}{5 - u_n}.$$

   Factorisant 4 dans le numérateur et remarquant que $5 - u_n = 2 + (3 - u_n)$, on obtient
$$u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)},$$

   ce qu'il fallait démontrer.

3. On montre par récurrence que $u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 2 < 3$.
   Hérédité. Supposons $u_n < 3$. Alors $5 - u_n > 2 > 0$, et
$$u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}.$$

   Comme $u_n < 3$ on a $3 + u_n < 6$ et $5 - u_n > 2$, donc
$$u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} < \frac{6}{2} = 3.$$

   Ainsi $u_{n+1} < 3$.
   Par récurrence, $u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Calculons v_{n+1} en fonction de v_n.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}} \quad \text{avec} \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$$

$$= \frac{\dfrac{3+u_n}{5-u_n}-1}{3-\dfrac{3+u_n}{5-u_n}} = \frac{\dfrac{3+u_n-(5-u_n)}{5-u_n}}{\dfrac{3(5-u_n)-(3+u_n)}{5-u_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n-2}{5-u_n}}{\dfrac{15-3u_n-3-u_n}{5-u_n}} = \frac{\dfrac{2(u_n-1)}{5-u_n}}{\dfrac{12-4u_n}{5-u_n}}$$

$$= \frac{2(u_n-1)}{12-4u_n} = \frac{2(u_n-1)}{4(3-u_n)} = \frac{u_n-1}{2(3-u_n)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u_n-1}{3-u_n} = \frac{1}{2}v_n.$$

$$\boxed{v_{n+1} = \tfrac{1}{2}v_n}$$

Conclusion : (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

(b) La suite (v_n) est géométrique de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0-1}{3-u_0} = \frac{2-1}{3-2} = 1$$

et de raison $\dfrac{1}{2}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = v_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.}$$

(c) On résout pour u l'équation $v = \dfrac{u-1}{3-u}$ (avec $3-u \neq 0$) :

$$v(3-u) = u-1 \quad \Longrightarrow \quad 3v-uv = u-1$$

donc

$$u(1+v) = 1+3v \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1+3v}{1+v}.$$

En remplaçant v par v_n on obtient, pour tout n,

$$\boxed{u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}.}$$

On en déduit que :

$$\boxed{u_n = \frac{1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}.}$$

Exercice 9. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.
L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$ donc l'équation admet $r = 1$ comme racine double.
Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n = \lambda + \mu n.$$

Pour $n = 0$, on obtient $u_0 = \lambda$ et pour $n = 1, u_1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = u_1 - \lambda = u_1 - u_0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$.
On remarque que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $u_1 - u_0$.
On pouvait le remarquer dès le début car pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 10.

1. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$.
   Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$
   Pour $n = 0$, on trouve $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = -1$.
   Pour $n = 1$, on trouve $u_1 = 2(-1 + \mu)$ d'où $-2 + 2\mu = 2$, i.e. $\mu = 2$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(2n - 1)$.
2. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-4) = 0$ donc les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.
   Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu 4^n$.
   Pour $n = 0$, on trouve $4 = \lambda + \mu$.
   Pour $n = 1$, on trouve $5 = -\lambda + 4\mu$ d'où $\mu = \dfrac{9}{5}$ et $\lambda = \dfrac{11}{5}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{11}{5} \times (-1)^n + \dfrac{9}{5} \times 4^n$.
3. On considère l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Les racines sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
   Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\cos(\frac{2n\pi}{3}) + \mu\sin(\frac{2n\pi}{3})$.
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = 1$.
   Pour $n = 1$, on a $u_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mu\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \mu\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\mu\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, d'où $\mu = 2$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(\frac{2n\pi}{3}) + 2\sin(\frac{2n\pi}{3})$.

Exercice 11.

1. On montre facilement par récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   En effet, la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Alors $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} > 0$.
   On peut donc poser pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) = \dfrac{1}{2}\ln(u_{n+1}) + \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$ donc $v_{n+2} - \dfrac{1}{2}v_{n+1} - \dfrac{1}{2}v_n = 0$.
   On considère l'équation caractéristique $r^2 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{2} = 0$.
   Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$. Il existe alors un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n = \lambda + \mu(-\frac{1}{2})^n = \ln(u_n)$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\lambda+\mu(-\frac{1}{2})^n}$.
Pour $n = 0$, on trouve $e^{\lambda+\mu} = e^3$ donc $\lambda + \mu = 3$.
Pour $n = 1$, on trouve $e^{\lambda-\frac{\mu}{2}} = 1$ donc $\lambda - \frac{\mu}{2} = 0$.
Ainsi, $\mu = 2$ et $\lambda = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2(-\frac{1}{2})^n+1}$.

2. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ donc on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(v_n)$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(\sqrt{v_n}) = \dfrac{1}{2}\ln(v_n) = \dfrac{1}{2}u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{u_0}{2^n} = \dfrac{\ln(v_0)}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = e^{u_n} = e^{2^{1-n}}$.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + \dfrac{4}{3}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2u_{n+2}-3u_{n+1}-2u_n = 2\left(w_{n+2}+\frac{4}{3}\right)-3\left(w_{n+1}+\frac{4}{3}\right)-2\left(w_n+\frac{4}{3}\right) = 2w_{n+2}-3w_{n+1}-2w_n-4 = 0.$$
On a l'équation caractéristique $2r^2 - 3r - 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = u_n - \frac{4}{3} = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n - \frac{4}{3}.$$
Pour $n = 0$, on trouve $11 = \lambda + \mu - \dfrac{4}{3}$ d'où $\lambda + \mu = \dfrac{37}{3} \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = \dfrac{74}{3}$.
Pour $n = 1$, on trouve $25 = 2\lambda - \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{4}{3}$ d'où $\dfrac{79}{3} = 2\lambda - \dfrac{\mu}{2}$.
En soustrayant les deux équations, on obtient $\dfrac{5\mu}{2} = -\dfrac{5}{3}$ d'où $\mu = -\dfrac{2}{3}$.
Puisque $\lambda = \dfrac{37}{3} - \mu$, on obtient $\lambda = 13$.
Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 13 \times 2^n + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{4}{3}$.

4. La suite n'est bien définie que si pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
En effet, on a $x_2^2 = x_1^3 x_0^2 = e^{75}e^{22}$ donc $x_2 = \pm\sqrt{e^{99}}$.
Or, si $x_2 = -\sqrt{e^{99}}$, on a $x_3^2 = x_2^3 x_1^2 = -\sqrt{e^{99}}^3 e^{50} < 0$, ce qui est impossible car $x_3 \in \mathbb{R}$.
On peut donc supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(x_n)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = \ln(x_{n+2}) = \frac{1}{2}\ln(x_{n+2}^2) = \frac{1}{2}\ln(x_{n+1}^3 x_n^2) = \frac{3}{2}\ln(x_{n+1}) + \ln(x_n) = \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n.$$
L'équation caractéristique associée est $r^2 - \dfrac{3}{2}r - 1 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e^{u_n} = e^{\lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n}.$$

Pour $n = 0$, on trouve $e^{11} = e^{\lambda+\mu}$ d'où $\lambda + \mu = 11 \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = 22$.
Pour $n = 1$, on trouve $e^{25} = e^{2\lambda - \frac{\mu}{2}}$ d'où $2\lambda - \frac{\mu}{2} = 25$.
En soustrayant les deux équations, on obtient $\dfrac{5\mu}{2} = -3$ d'où $\mu = -\dfrac{6}{5}$.
Puisque $\lambda = 11 - \mu$, on obtient $\lambda = \dfrac{61}{5}$.
Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = e^{\frac{61}{5} \times 2^n - \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n}$.