

Liste d'exercices n°12

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues réelles.

$$1. \begin{cases} 2y - 2z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = -1 \\ 2z - t = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x + y + z - 2t = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y + z + t = -1 \\ x + z + t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 12 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -3x + y + z + t = -1 \\ x - 3y + z + t = -1 \\ x + y - 3z + t = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit k un réel. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues réelles.

$$1. \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} kx + (k^2 - k)y = k \\ (k + 1)x - ky = 5k + 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y + 2z = k \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

Exercice 3. Soient a, b, c et d quatre réels. A quelles conditions les systèmes suivants sont-ils compatibles ?

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 3a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + 13y - 7z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4z - t = a \\ 3x + y + z + 2t = b \\ y - 2z + t = c \\ 2t = d \end{cases}$$

Exercice 4. En posant $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$, déterminer tous les réels x, y, z strictement positifs qui satisfont le système non linéaire

$$\begin{cases} xy^2z = 2 \\ \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{xz}{y^2} = 8. \end{cases}$$

En déduire ensuite toutes les solutions dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 5. On cherche à déterminer les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$P(-1) = 2, \quad P(0) = 1, \quad P(2) = 5.$$

On pose, pour tout réel x , $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Écrire le système linéaire en a, b, c associé à ces conditions.
2. Résoudre ce système et en déduire l'expression de P .
3. Vérifier que la courbe représentative de P passe bien par les trois points imposés.

Exercice 6. On veut préparer un mélange de trois solutions S_1, S_2, S_3 contenant du sel (NaCl) et du sucre (glucose) :

- S_1 contient 1 g de sel et 3 g de sucre par litre.
- S_2 contient 2 g de sel et 1 g de sucre par litre.
- S_3 contient 0 g de sel et 4 g de sucre par litre.

On veut obtenir un mélange total de 10 L qui contienne au total 14 g de sel et 26 g de sucre.

1. On note x_1, x_2, x_3 les volumes (en L) de S_1, S_2, S_3 utilisés. Écrire le système vérifié par (x_1, x_2, x_3) .
2. Résoudre ce système linéaire.
3. Discuter la possibilité d'avoir $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.
Que signifie une solution avec un $x_i < 0$ dans ce contexte ?

Exercice 7. Résoudre le système suivant d'inconnues complexes :

$$(S) : \begin{cases} (1 + i)z_1 + 2z_2 - iz_3 = 1, \\ z_1 + (2 - i)z_2 + z_3 = i, \\ 2z_1 - iz_2 + (1 + i)z_3 = 1 + i, \end{cases}$$