Lycée Fénelon
Année 2025–2026

BCPST1
A. Wassfi

Devoir maison n°6
A rendre pour le mercredi 10 décembre 2025

# Problème

Dans le cadre de l'étude d'une espèce de lièvres, on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population. L'objectif du problème est de comparer différentes modélisations ainsi que leur simulation.

On note $t$ le temps et $x(t)$ l'effectif des lièvres en fonction du temps. On suppose, pour commencer, que la population est isolée dans un environnement aux ressources abondantes. On propose de modéliser la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx, \tag{1}$$

où $r$ est une constante strictement positive représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (1) de condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.
   (b) Dessiner à la main l'allure de la solution de (1).
   (c) Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres avec ce modèle ? L'équation différentielle (1) est-elle une modélisation raisonnable ?

   On suppose à présent que les ressources du milieu sont limitées et on modélise la dynamique de population de lièvres par :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

   où $K$ est une constante strictement positive.

2. (a) Intuitivement, quelle allure a une solution $x$ de (2) tant que l'effectif de lièvres $x(t)$ reste petit ?
   (b) En considérant (2), établir le tableau de signes de $\frac{dx}{dt}$ en fonction de $x$ pour $x \geq 0$.
3. Soit $x$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. On admet que pour tout $t \geq 0$, $x(t) > 0$. On pose $z(t) = \frac{1}{x(t)}$.
   (a) Montrer que :
$$\frac{dz}{dt} = \frac{r}{K} - rz.$$
   (b) Résoudre cette équation différentielle et exprimer la solution en fonction de $t$, $r$, $K$ et $z_0 = z(0)$.
   (c) En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de $t$, $r$, $K$ et $x_0$.
   (d) Dessiner à la main l'allure des solutions pour une condition initiale $x_0 < K$ et pour une condition initiale $x_0 > K$.
   (e) En s'appuyant sur les réponses précédentes, décrire les différences entre les modèles (1) et (2) et donner une interprétation biologique de la constante $K$.