Corrigé de la liste d'exercices n°12 **Systèmes linéaires**

Exercice 1

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1\\ x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1\\ & & & & 2z & - & t & = & 2\end{array}\right. \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1\\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1\\ & & & & 2z & - & t & = & 2\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & y-z-2t-1=-\frac{5}{2}t-\frac{1}{2}\\ y & = & \frac{3}{2}\\ z & = & \frac{t}{2}+1\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y,z,t)=\left(-\frac{5}{2}t-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{t}{2}+1,t\right),t\in\mathbb{R}\}.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3\\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & -3\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3\\ & - & 3y & + & 3z & - & 4t & = & -9\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -2y+z-t+3\\ & & y & = & z-\frac{4}{3}t+3\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -z+\frac{5}{3}t-3\\ & & y & = & z-\frac{4}{3}t+3\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y,z,t)=\left(-z+\frac{5}{3}t-3,z-\frac{4}{3}t+3,z,t\right),(z,t)\in\mathbb{R}^2\}.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2\\ x & + & 2y & = & 1\\ x & + & y & = & 1\end{array}\right. \overset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2\\ & & 3y & = & 0\\ & & y & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

Le système admet donc pour unique solution $(x,y)=(1,0)$.

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & + & z & + & t & = & -1\\ x & & & + & z & + & t & = & 0\\ x & + & y & & & + & t & = & 1\\ x & + & y & + & z & & & = & 2\end{array}\right. \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ x & + & y & & & + & t & = & 1\\ x & + & y & + & z & & & = & 2\end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & y & - & z & & & = & 1\\ & & y & & & - & t & = & 2\end{array}\right. \overset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\ L_4\leftarrow L_4-L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & & - & 2z & - & t & = & 2\\ & & & - & z & - & 2t & = & 3\end{array}\right.$$

$$\overset{L_4\leftarrow 2L_4-L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & & - & 2z & - & t & = & 2\\ & & & & & - & 3t & = & 4\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & & & = & \frac{5}{3}\\ & y & & & = & \frac{2}{3}\\ & & z & & = & -\frac{1}{3}\\ & & & t & = & -\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Le système admet donc pour unique solution $(x,y,z,t)=(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$.

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 12 \\ x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 11 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & 11 \\ & & & - & 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

donc $z = -\frac{11}{2} = \frac{1}{4}$, ce qui est absurde. On en conclut que le système est incompatible.

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ -3x & + & y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & - & 8t & = & 2 \\ & - & 4y & & & + & 4t & = & -2 \\ & & & - & 4z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & - & 8t & = & 2 \\ & & & & 4z & - & 4t & = & 0 \\ & & & - & 4z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & & & = & t + \frac{1}{2} \\ & y & & & = & t + \frac{1}{2} \\ & & z & & = & t \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y, z, t) = \left(t + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}, t, t\right), t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} kx & + & y & = & 1 \\ x & + & ky & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ky & = & 1 \\ kx & + & y & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - kL_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ky & = & 1 \\ & & (1-k^2)y & = & 1-k \end{array}\right.$$

• Si $k = 1$, le système devient équivalent à $x + y = 1$ donc le système admet une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y) = (x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $k = -1$, la deuxième ligne du système devient $0 = 2$ donc le système est incompatible.

• Si $k \notin \{-1, 1\}$, alors $1 - k^2 \neq 0$ et on trouve $y = \dfrac{1-k}{1-k^2} = \dfrac{1}{1+k}$ puis $x = 1 - ky = 1 - \dfrac{k}{1+k} = \dfrac{1}{1+k}$.

Dans ce cas, le système admet pour unique solution $(x, y) = (\frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+k})$.

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} kx & + & (k^2-k)y & = & k \\ (k+1)x & - & ky & = & 5k+3 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & k^2y & = & -4k-3 \\ (k+1)x & - & ky & = & 5k+3 \end{array}\right.$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + (k+1)L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & k^2y & = & -4k-3 \\ & & (k^3+k^2-k)y & = & -4k^2-2k \end{array}\right.$$

On a $k^3 + k^2 - k = k(k^2 + k - 1) = k(k - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(k - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

• Si $k = 0$, la deuxième ligne devient $0 = 0$ et le système équivaut à $x = 3$ donc il admet une infinité de solutions que sont $\{(x, y) = (3, y), y \in \mathbb{R}\}$.

- Si $k \in \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, le système est incompatible car la deuxième ligne donne $0 \neq 0$ (en effet, le second membre $-4k^2-2k$ s'annule pour $k=0$ ou $k=-\frac{1}{2}$).
- Si $k \notin \{0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, on obtient $y = \dfrac{-4k^2-2k}{k^3+k^2-k} = \dfrac{4k+2}{1-k-k^2}$ puis

$$x = k^2y+4k+3 = \frac{4k^3+2k^2+(4k+3)(1-k-k^2)}{1-k-k^2} = \frac{-5k^2+k+3}{1-k-k^2},$$

ce qui fournit une unique solution au système.

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 3 \\ x &-& y &+& 3z &=& 8 \\ x &+& y &+& 2z &=& k \\ x &+& 2y &+& 2z &=& -3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1\\ L_4\leftarrow 2L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 3 \\ &-& 3y &+& 5z &=& 13 \\ && y &+& 3z &=& 2k-3 \\ && 3y &+& 3z &=& -9 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow 3L_3+L_2\\ L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 3 \\ &-& 3y &+& 5z &=& 13 \\ &&&& 14z &=& 6k+4 \\ &&&& 8z &=& 4 \end{array}\right. \underset{L_4\leftarrow 7L_4-4L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 3 \\ &-& 3y &+& 5z &=& 13 \\ &&&& 14z &=& 6k+4 \\ &&&& 0 &=& -24k+12 \end{array}\right.$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$, le système est incompatible.
- Si $k = \frac{1}{2}$, le système est comaptible et on trouve pour unique solution

$$(x,y,z) = \left(3, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 3

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 2y &-& z &=& 3a \\ -2x &-& 3y &+& 3z &=& b \\ x &+& y &-& 2z &=& c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 2y &-& z &=& 3a \\ && y &+& z &=& 6a+b \\ &-& y &-& z &=& -3a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2\\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &&&-& 3z &=& -9a-2b \\ && y &+& z &=& 6a+b \\ &&&& 0 &=& 3a+b+c \end{array}\right.$$

La dernière ligne montre que $\boxed{\text{le système est compatible si et seulement si } 3a+b+c=0}$ et dans ce cas, on a $y=-z+6a+b$ et $x=3z-9a-2b$.
Ainsi, dans le cas où le système est compatible, il y a une infinité de solutions que sont

$$\boxed{\{(x,y,z) = (3z-9a-2b, -z+6a+b, z), z\in\mathbb{R}\}.}$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& a \\ 2x &+& 13y &-& 7z &=& b \\ x &-& y &+& z &=& c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& a \\ && 12y &-& 8z &=& -a+b \\ &-& 3y &+& z &=& -a+2c \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow 12L_1-L_2\\ L_3\leftarrow 4L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 24x &&&+& 20z &=& 13a-b \\ && 12y &-& 8z &=& -a+b \\ &&&-& 4z &=& -5a+b+8c \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+5L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 24x &&&&&=& -12a+4b+40c \\ && 12y &&&=& 9a-b-16c \\ &&&-& 4z &=& -5a+b+8c \end{array}\right.$$

On constate que le système est compatible pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x,y,z) = \left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{6}+\frac{5c}{3}, \frac{3a}{4}-\frac{b}{12}-\frac{4c}{3}, \frac{5a}{4}-\frac{b}{4}-2c\right).}$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & 4z & - & t & = & a\\ 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b\\ & & y & - & 2z & + & t & = & c\\ & & & & & & 2t & = & d\end{array}\right. \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b\\ & & & & 4z & - & t & = & a\\ & & y & - & 2z & + & t & = & c\\ & & & & & & 2t & = & d\end{array}\right. \overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b\\ & & y & - & 2z & + & t & = & c\\ & & & & 4z & - & t & = & a\\ & & & & & & 2t & = & d\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & & & = & b-d\\ & & y & - & 2z & & & = & c-\frac{d}{2}\\ & & & & 4z & & & = & a+\frac{d}{2}\\ & & & & & & t & = & \frac{d}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & & & = & b-d-\frac{a}{4}-\frac{d}{8}\\ & & y & & & = & c-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}+\frac{d}{4}\\ & & & z & & = & \frac{a}{4}+\frac{d}{8}\\ & & & & t & = & \frac{d}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & & & & = & -\frac{a}{4}+b-\frac{9d}{8}-\frac{a}{2}-c+\frac{d}{4}\\ & & y & & & = & \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4}\\ & & & z & & = & \frac{a}{4}+\frac{d}{8}\\ & & & & t & = & \frac{d}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl} 3x & & & & = & -\frac{3a}{4}+b-c-\frac{7d}{8}\\ & y & & & = & \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4}\\ & & z & & = & \frac{a}{4}+\frac{d}{8}\\ & & & t & = & \frac{d}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & & & & = & -\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}-\frac{7d}{24}\\ & y & & & = & \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4}\\ & & z & & = & \frac{a}{4}+\frac{d}{8}\\ & & & t & = & \frac{d}{2}\end{array}\right.$$

Ainsi, le système est compatible pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x, y, z, t) = \left(-\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}-\frac{7d}{24}, \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4}, \frac{a}{4}+\frac{d}{8}, \frac{d}{2}\right).}$$

Exercice 4

Supposons dans un premier temps que $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et posons $X = \ln(x), Y = \ln(y), Z = \ln(z)$. En appliquant le logarithme à chaque ligne du système, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} X & + & 2Y & + & Z & = & \ln(2)\\ -X & + & Y & & & = & 0\\ X & - & 2Y & + & Z & = & \ln(8)\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} X & + & 2Y & + & Z & = & \ln(2)\\ & & 3Y & + & Z & = & \ln(2)\\ & - & 4Y & & & = & 2\ln(2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} X & & & = & -\frac{1}{2}\ln(2)\\ & Y & & = & -\frac{1}{2}\ln(2)\\ & & Z & = & \frac{5}{2}\ln(2)\end{array}\right.$$

donc $(x, y, z) = (2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{\frac{5}{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$.
Cherchons maintenant les solutions dans $\mathbb{R}^3$. Si (x, y, z) est solution du système, alors nécessairement x, y et z sont tous trois non nuls.
Par ailleurs, puisque $\frac{y}{x} = 1 > 0$, on en déduit que x et y sont de même signe. Par ailleurs, $xz = 8y^2 > 0$ donc x et z sont également de même signe.
On en déduit que x, y et z sont tous trois strictement positifs, ou tous trois strictement négatifs.
On a déjà résolu le système sous l'hypothèse où ils sont strictement positifs.
Supposons que x, y et z sont strictement négatifs et sont solutions du système. On remarque aisément que $(-x, -y, -z)$ est alors une solution du système avec $-x, -y$ et $-z$ strictement positifs donc $(-x, -y, -z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ d'où $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.
Finalement, le système admet deux solutions : $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ ou $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.

Exercice 5

On cherche $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que

$$P(-1) = 2, \qquad P(0) = 1, \qquad P(2) = 5.$$

Les conditions donnent le système

$$(S) \ : \ \begin{cases} a - b + c = 2, \\ c = 1, \\ 4a + 2b + c = 5. \end{cases}$$

On commence par utiliser l'équation la plus simple, $c = 1$. On se sert de la deuxième ligne pour simplifier les deux autres :

$$(S) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\iff} \begin{cases} a - b &= 1, \\ c &= 1, \\ 4a + 2b &= 4. \end{cases} \tag{S_1}$$

On élimine maintenant l'inconnue a dans L_3 :

$$(S_1) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4\,L_1}{\iff} \begin{cases} a - b &= 1, \\ c &= 1, \\ 6b &= 0. \end{cases} \tag{S_2}$$

Le système (S_2) est maintenant très simple :
- De la troisième équation : $6b = 0 \Rightarrow b = 0$.
- De la première équation : $a - b = 1 \Rightarrow a = 1$.
- De la deuxième équation : $c = 1$.

On obtient donc

$$(a, b, c) = (1, 0, 1),$$

et par conséquent

$$\boxed{P(x) = x^2 + 1.}$$

Vérification rapide :

$$P(-1) = (-1)^2 + 1 = 2, \quad P(0) = 0^2 + 1 = 1, \quad P(2) = 2^2 + 1 = 5,$$

les trois conditions sont bien satisfaites.

Exercice 6

1. Mise en équations. On note x_1, x_2, x_3 les volumes (en L) de S_1, S_2, S_3 dans le mélange final.
- Volume total :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

- Quantité totale de sel (en g) :

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 14.$$

— Quantité totale de sucre (en g) :

$$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 26.$$

Le système est donc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 26. \end{cases}$$

2. Résolution du système. On élimine d'abord x_1 des deux dernières équations :

$$(S) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 10, \\ x_2 - x_3 & = & 4, \\ -2x_2 + x_3 & = & -4. \end{array} \right.$$

On élimine ensuite x_2 de la troisième équation à partir de la deuxième :

$$(S) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 10, \\ x_2 - x_3 & = & 4, \\ -x_3 & = & 4. \end{array} \right.$$

Le système (S_2) est triangulaire. On peut alors remonter dans les calculs :
- Troisième équation : $-x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = -4$.
- Deuxième équation : $x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow x_2 - (-4) = 4 \Rightarrow x_2 = 0$.
- Première équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + 0 - 4 = 10 \Rightarrow x_1 = 14.$$

On obtient donc l'unique solution :

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (14,\ 0,\ -4).}$$

3. Interprétation physique. Mathématiquement, le système a une solution unique. Physiquement, on exige

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

car les volumes de solution ne peuvent pas être négatifs.
Or ici $x_3 = -4 < 0$. Cela signifie qu'il faudrait « enlever » 4 L de la solution S_3 au lieu d'en ajouter : ce n'est pas possible en pratique.

Conclusion : le problème de mélange posé est **incompatible** avec la contrainte de volumes positifs ; il n'existe pas de mélange réel de S_1, S_2, S_3 satisfaisant simultanément les conditions données.

Exercice 7

On note les trois lignes $(L_1), (L_2), (L_3)$ dans l'ordre.

On remarque que (L_2) a un coefficient plus simple devant z_1 (égal à 1). On commence donc par échanger les deux premières lignes :

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + (2 - \mathrm{i})z_2 + z_3 & = & \mathrm{i}, \\ (1 + \mathrm{i})z_1 + 2z_2 - \mathrm{i}z_3 & = & 1, \\ 2z_1 - \mathrm{i}z_2 + (1 + \mathrm{i})z_3 & = & 1 + \mathrm{i}. \end{array} \right. \qquad (S_1)$$

On élimine ensuite z_1 des équations (L_2) et (L_3) à partir de la nouvelle (L_1).

$$(S_1) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-(1+\mathrm{i})L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} z_1+(2-\mathrm{i})z_2+z_3 & = & \mathrm{i}, \\ (-1-\mathrm{i})z_2+(-1-2\mathrm{i})z_3 & = & 2-\mathrm{i}, \\ (-4+\mathrm{i})z_2+(-1+\mathrm{i})z_3 & = & 1-\mathrm{i}. \end{array} \right. \qquad (S_2)$$

On continue l'élimination en supprimant le coefficient de z_2 dans la troisième équation à partir de la deuxième. On utilise le facteur

$$\lambda = \frac{-4+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}.$$

$$(S_2) \underset{L_3 \leftarrow L_3-\lambda L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} z_1+(2-\mathrm{i})z_2+z_3 & = & \mathrm{i}, \\ (-1-\mathrm{i})z_2+(-1-2\mathrm{i})z_3 & = & 2-\mathrm{i}, \\ \dfrac{11+3\mathrm{i}}{2}\, z_3 & = & \dfrac{1+11\mathrm{i}}{2}. \end{array} \right. \qquad (S_3)$$

Nous avons maintenant un système triangulaire : on résout la dernière équation et on remonte.

Calcul de z_3. La troisième équation de (S_3) donne

$$\frac{11+3\mathrm{i}}{2}\, z_3 = \frac{1+11\mathrm{i}}{2} \quad \Longrightarrow \quad z_3 = \frac{1+11\mathrm{i}}{11+3\mathrm{i}}.$$

On simplifie en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué $11-3\mathrm{i}$:

$$z_3 = \frac{(1+11\mathrm{i})(11-3\mathrm{i})}{(11+3\mathrm{i})(11-3\mathrm{i})} = \frac{22+59\mathrm{i}}{121+9} = \frac{22+59\mathrm{i}}{130} = \frac{22}{65} + \frac{59}{65}\mathrm{i}.$$

Donc

$$\boxed{z_3 = \frac{22}{65} + \frac{59}{65}\,\mathrm{i}}.$$

Calcul de z_2. On utilise la deuxième équation de (S_3) :

$$(-1-\mathrm{i})z_2 + (-1-2\mathrm{i})z_3 = 2-\mathrm{i}.$$

On isole z_2 :

$$(-1-\mathrm{i})z_2 = 2-\mathrm{i}-(-1-2\mathrm{i})z_3, \qquad z_2 = \frac{2-\mathrm{i}-(-1-2\mathrm{i})z_3}{-1-\mathrm{i}}.$$

En remplaçant z_3 par sa valeur et en faisant les calculs, on obtient

$$\boxed{z_2 = -\frac{36}{65} - \frac{2}{65}\,\mathrm{i}}.$$

Calcul de z_1. On utilise la première équation de (S_3) :

$$z_1 + (2-\mathrm{i})z_2 + z_3 = \mathrm{i} \quad \Longrightarrow \quad z_1 = \mathrm{i} - (2-\mathrm{i})z_2 - z_3.$$

En remplaçant z_2 et z_3 par leurs expressions, on trouve

$$\boxed{z_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{i}}.$$

Conclusion : le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{C}^3$:

$$\boxed{(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}, -\frac{36}{65} - \frac{2}{65}\mathrm{i}, \frac{22}{65} + \frac{59}{65}\mathrm{i}\right)}.$$