Liste d'exercices n°13 — Matrices

Exercice 1. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Préciser si les expressions suivantes ont un sens et, si oui, les calculer.

1. AB
2. BA
3. $AD - C$
4. $BC + 4A$
5. $(B+2)C$
6. $B + 2C$
7. $(AB + 3I_2)(BC + 4A)$
8. $(A - 4I_2)(2A - I_2)$
9. $2A^2 - 9A + 4I_2$

Exercice 2.

1. Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_2$.
2. Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = B$.

Exercice 3. oit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2, (E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

Montrer que pour tout $(i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{i',j'} = \delta_{j,i'}E_{i,j'}$.

Exercice 4. Trouver toutes les matrices qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^T A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que
$$A^T A = 0 \iff A = 0.$$

Exercice 6. Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 13 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ non nul vérifiant

$$AX = \lambda X.$$

2. Trouver tous les vecteurs $X \in \mathbb{R}^3$ tels que :
   (a) $AX = 0$.
   (b) $AX = 2X$.
   (c) $AX = 4X$.

Exercice 8. Soient a, b et c trois complexes. Calculer les puissances de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Exercice 9. Calculer les puissances de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 10.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$.
2. En déduire que C est inversible et calculer son inverse.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$C^n = a_n C + b_n I_3.$$

Exercice 12. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n. \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = AX_n.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
3. Calculer A^2. En déduire A^{2n} et A^{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

Exercice 13. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $aA + bB = C$.
2. Evaluer, pour tout entier naturel n, les matrices A^n et B^n.
3. En déduire la valeur de C^n, pour tout entier naturel n.

Exercice 14. Soit a un réel. Calculer le déterminant des matrices suivantes puis dire si elles sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -4 & 8 & -14 \\ -3 & 7 & -12 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)(A - 3I_3)$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17. Soit a un réel. Posons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice M soit inversible.

Exercice 18. Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
   (b) Calculer A^n pour tout entier naturel n.
2. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{1}{2}(3u_n - v_n) \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}(-u_n + 3v_n). \end{cases}$$

   On pose également pour tout entier naturel $n, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n, U_n = A^n U_0$.
   (b) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 19. Soient a, b et c des nombres complexes. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire que si $a + b + c = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel p, on a :

$$(I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n - A^p.$$

2. Supposons que $A^n = 0$.
   Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 21. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 22. On souhaite déterminer les solutions du système différentiel suivant (avec $t \in \mathbb{R}$) :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = & 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = & x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

1. On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   Montrer que $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice à déterminer.
2. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calculera d'abord P^{-1}.
3. On pose, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
   Montrer que $Y'(t) = DY(t)$ et en déduire $Y(t)$.
4. Donner enfin les solutions du système (S).