Corrigé de la liste d'exercices n°13 — Matrices

Exercice 1

1. $AB = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 15 & 13 & 12 \end{pmatrix}$
2. Impossible.
3. $AD \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc $AD - C$ n'a pas de sens.
4. $BC + 4A = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 19 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 27 & 21 \end{pmatrix}$
5. $B + 2$ n'a pas de sens.
6. $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc $B + 2C$ n'a pas de sens.
7. $AB \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ donc $AB + 3I_2$ n'a pas de sens.
8. $(A - 4I_2)(2A - I_2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$
9. $2A^2 - 9A + 4I_2 = (A - 4I_2)(2A - I_2) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

   •**Analyse** : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} a^2 + bc &= 1 \\ ab + bd &= 0 \\ ac + cd &= 0 \\ bc + d^2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc &= 1 \\ b(a + d) &= 0 \\ c(a + d) &= 0 \\ bc + d^2 &= 1 \end{cases}$$

   <u>1er cas</u> : si $a + d = 0$, alors $d = -a$ et les première et dernière lignes du système donnent $bc = 1 - a^2$.

   - Si $b = 0$, on obtient $a^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et on obtient les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

   - Si $b \neq 0$, on obtient $c = \dfrac{1 - a^2}{b}$, ce qui donne les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

   <u>2ème cas</u> : si $a + d \neq 0$, on a nécessairement $b = c = 0$ puis $a^2 = 1$ et $d^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et $d = \pm 1$ avec la condition $d \neq -a$ donc nécessairement $a = d$. On obtient alors les matrices I_2 et $-I_2$.

•Synthèse :

- Soit $c \in \mathbb{R}$. On a bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On a bien $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} = I_2$.

Enfin, on a bien $I_2^2 = (-I_2)^2 = I_2$ donc les matrices cherchées sont toutes celles trouvées dans l'analyse.

2. Soit $A = 2B - I_2 \Leftrightarrow B = \dfrac{1}{2}(A + I_2)$. On a alors

$$B^2 = B \Leftrightarrow \frac{1}{4}(A + I_2)^2 = \frac{1}{2}(A + I_2) \Leftrightarrow A^2 + 2A + I_2 = 2(A + I_2) \Leftrightarrow A^2 = I_2$$

donc A est de la forme d'une des matrices trouvées dans la question précédente.

- Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

- Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$. Alors $B = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{1-a^2}{2b} & \frac{1-a}{2} \end{pmatrix}$.

- Si $A = I_2$, alors $B = I_2$ et si $A = -I_2$, alors $B = 0_2$.

Exercice 3

Soient $(i, j, i', j') \in [\![1, n]\!]^4$. Soient $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$.
On a

$$(E_{i,j}E_{i',j'})_{k,l} = \sum_{t=1}^{n} (E_{i,j})_{k,t}(E_{i',j'})_{t,l} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,t}\delta_{i',t}\delta_{j',l}.$$

On remarque que tous les termes de la somme sont nuls si $j \neq i'$. Si $j = i'$, le seul terme de la somme non nul est celui pour $t = j = i'$. On en déduit que

$$(E_{i,j}E_{i',j'})_{k,l} = \delta_{j,i'}\delta_{i,k}\delta_{j',l} = \delta_{j,i'}(E_{i,j'})_{k,l},$$

et ceci est vrai pour tous les cœfficients $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ d'où l'égalité voulue :

$$\boxed{\forall (i, j, i', j') \in [\![1, n]\!]^4, E_{i,j}E_{i',j'} = \delta_{j,i'}E_{i,j'}.}$$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
AJ = JA \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = a_{4,2} = a_{4,3} = 0 \\ a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{4,4} \\ a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,4} \\ a_{1,3} = a_{2,4} \\ a_{2,1} = a_{3,2} = a_{4,3} = 0 \\ a_{3,1} = a_{4,2} = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. On a $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A$ est bien une matrice symétrique.
2. • Si $A = 0$, il est clair que $A^T A = 0$.

   • Réciproquement, supposons que $A^T A = 0$ et montrons que $A = 0$.
   Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

   $$0 = (A^T A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j}.$$

   En particulier, pour $i = j$, on obtient pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. C'est une somme nulle dont tous les termes sont positifs (car ce sont des carrés de nombres réels) donc nécessairement, tous les termes sont nuls, i.e. pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i} = 0$, ce qui implique que $A = 0$.

Exercice 6

Echelonnons les matrices pour déterminer leur rang.

1. C'est une matrice à deux colonnes non proportionnelles donc elle est de rang 2.

2. $\begin{pmatrix}3&2&2\\4&-1&3\\2&5&1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow 3L_3-2L_1]{L_2\leftarrow 3L_2-4L_1} \begin{pmatrix}3&2&2\\0&-11&1\\0&11&-1\end{pmatrix} \xleftarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{pmatrix}3&2&2\\0&-11&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc la matrice est de rang 2.

3. $\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\2&13&-7&2\\1&-1&1&1\\1&7&-4&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1}]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&7&-5&0\\0&-4&2&0\\0&4&-3&0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4\leftarrow 7L_4-4L_2]{L_3\leftarrow 7L_3+4L_2} \begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&7&-5&0\\0&0&-6&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\leftarrow 6L_4-L_3}$
$\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&7&-5&0\\0&0&-6&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ donc la matrice est de rang 3.

4. $\begin{pmatrix}2&1&1&1\\2&3&-3&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow 2L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&2&-4&0\\0&-3&1&-3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow 2L_3+3L_2} \begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&2&-4&0\\0&0&-10&-6\end{pmatrix}$ donc la matrice est de rang 3.

5. $\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\-1&1&1&0\\0&-1&1&1\\1&0&-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&2&1&-1\\0&-1&1&1\\0&-1&-1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4\leftarrow 2L_4+L_2]{L_3\leftarrow 2L_3+L_2} \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&2&1&-1\\0&0&3&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\leftarrow 3L_4+L_3}$
$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&2&1&-1\\0&0&3&1\\0&0&0&10\end{pmatrix}$ donc la matrice est de rang 4.

Exercice 7

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}, AX = \lambda X &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}, (A-\lambda I_3)X = 0\\ &\Leftrightarrow A-\lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_3) < 3.\end{aligned}$$

On cherche donc les réels λ tels que le rang de $A-\lambda I_3$ soit strictement inférieur à 3.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons le rang de $A-\lambda I_3$ en fonction de λ. On a

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix}2-\lambda&-2&2\\-1&1-\lambda&1\\1&-1&3-\lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L3} \begin{pmatrix}1&-1&3-\lambda\\-1&1-\lambda&1\\2-\lambda&-2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+(\lambda-2)L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&3-\lambda\\0&-\lambda&4-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda^2+5\lambda-4\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}1&-1&3-\lambda\\0&-\lambda&4-\lambda\\0&0&-\lambda^2+6\lambda-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&3-\lambda\\0&-\lambda&4-\lambda\\0&0&(2-\lambda)(\lambda-4)\end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda \notin \{0,2,4\}$, on remarque que $\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) = 3$ (les trois pivots sont non nuls).
- Si $\lambda = 2$, on a obtenu $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A-2I_3) = 2 < 3$.
- Si $\lambda = 4$, on a obtenu $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A-4I_3) = 2 < 3$.

- Si $\lambda = 0$, on a obtenu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$.

Finalement, les trois réels cherchés sont $\{0, 2, 4\}$.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \\ x - y + 3z & = & 0 \end{cases} \overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ 4z & = & 0 \\ 4z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & y \\ z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 2X$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z & = & 2x \\ -x + y + z & = & 2y \\ x - y + 3z & = & 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -2y + 2z & = & 0 \\ -x - y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = & z \\ x & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 4X$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z & = & 4x \\ -x + y + z & = & 4y \\ x - y + 3z & = & 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z & = & 0 \\ -x - 3y + z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - y + z & = & 0 \\ -4y & = & 0 \\ -4y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_4 + bJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Puisque aI_4 et bJ commutent, on peut utiliser la formule de binôme et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_4)^{n-k} (bJ)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k.$$

Or, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J^4 = J^3 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4$ donc pour tout $k \geqslant 4$, $J^k = 0_4$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k = a^n I_4 + n a^{n-1} b J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 J^3 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 \\ 0 & a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & 0 & a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 9

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = -I_2$ donc $A^3 = -A$ puis $A^4 = -A^2 = I_2$.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $A^{4n} = (A^4)^n = I_2^n = I_2, A^{4n+1} = A^{4n} \times A = A, A^{4n+2} = A^{4n} \times A^2 = -I_2$ puis $A^{4n+3} = A^{4n+2} \times A = -A.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geqslant 3$, $J^n = 0_3$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + J$ où J est la matrice de la question précédente. Puisque I_2 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I_2 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

   car $J^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 3$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

   On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A$.

   On en déduit par une récurrence immédiate que $A^0 = I_2$ et pour tout $n \geqslant 1, A^n = A$.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 14 & -23 \\ -4 & 9 & -15 \end{pmatrix}$ puis

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 14 & -23 \\ -4 & 9 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^{3n} = (A^3)^n = (I_3)^n = I_3, A^{3n+1} = A$ et $A^{3n+2} = A^2$.

Exercice 10

1. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ puis $J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

   On peut montrer par une récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 1, J^n = 2^{n-1}J$ (et $J^0 = I_2$).

2. On a $A = 4I_2 + 2J$. Puisque $4I_2$ et $2J$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4I_2)^{n-k}(2J)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k} 2^k J^k = 4^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n-k} 2^{k-1} J$$

   d'où $A^n = 4^n I_2 + \left(2^{2n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) J = 4^n I_2 + \left(2^{2n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 \right) \right) J$ i.e.

$$A = 2^{2n} I_2 + 2^{2n-1}(2^n - 1)J.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n} + 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n-1}(2^n - 1) \\ 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n} + 2^{2n-1}(2^n - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n-1}(2^n + 1) & 2^{2n-1}(2^n - 1) \\ 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n-1}(2^n + 1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. On a

$$\begin{aligned} C^2 - 4C &= \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 24 & -40 \\ 8 & -23 & 40 \\ 8 & -24 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 24 & -40 \\ 8 & -20 & 40 \\ 8 & -24 & 44 \end{pmatrix} \\ &= -3I_3. \end{aligned}$$

2. Ainsi, $C(C-4I_3)=-3I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4I_3-C)C=I_3$.

   On en déduit que C est inversible et que $C^{-1}=\dfrac{1}{3}(4I_3-C)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -6 & 10\\ -2 & 9 & -10\\ -2 & 6 & -7\end{pmatrix}$.

3. Montrons cette propriété par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
   • On a $C^0=I_3=a_0C+b_0I_3$ avec $a_0=0$ et $b_0=1$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
   • Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $C^n=a_nC+b_nI_3$. On a alors

   $$C^{n+1}=C^n\times C=(a_nC+b_nI_3)C=a_nC^2+b_nC=a_n(4C-3I_3)+b_nC=(4a_n+b_n)C-3a_nI_3.$$

   Posons $a_{n+1}=4a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-3a_n$ et on a bien $C^{n+1}=a_{n+1}C+b_{n+1}I_3$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Exercice 12

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

   On a pour tout $n\in\mathbb{N}, AX_n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n+y_n\\ x_n-y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}$.
2. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
   • Pour $n=0, A^nX_0=A^0X_0=X_0=X_n$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.
   • Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $X_n=A^nX_0$.
   On a alors $X_{n+1}=AX_n=A\times A^nX_0=A^{n+1}X_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
3. On a $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2I_2$.
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, A^{2n}=(A^2)^n=(2I_2)^n=2^nI_2$ et $A^{2n+1}=A^{2n}\times A=2^nA$.
4. D'après les questions précédentes, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\begin{pmatrix}x_{2n}\\ y_{2n}\end{pmatrix}=X_{2n}=A^{2n}X_0=2^nX_0=2^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n\\ 2^n\end{pmatrix}$$

   donc pour tout $n\in\mathbb{N}, x_{2n}=y_{2n}=2^n$.
   De même, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\begin{pmatrix}x_{2n+1}\\ y_{2n+1}\end{pmatrix}=X_{2n+1}=A^{2n+1}X_0=2^nAX_0=\begin{pmatrix}2^n & 2^n\\ 2^n & -2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n(x_0+y_0)\\ 2^n(x_0-y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\ 0\end{pmatrix}$$

   donc pour tout $n\in\mathbb{N}, x_{2n+1}=2^{n+1}$ et $y_{2n+1}=0$.

Exercice 13

1. On remarque que $2A+B=C$.
2. • On a $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ puis

   $$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 9 & 9\\ 9 & 9 & 9\\ 9 & 9 & 9\end{pmatrix}.$$

On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 1, A^n = 3^{n-1}A$.

- On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B$ puis

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4B.$$

On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 1, B^n = 2^{n-1}B$.

3. On vérifie que A et B commutent. En effet,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $2A$ et B commutent. On peut donc utiliser la fomule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} C^n = (2A+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2A)^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} A^{n-k} B^k \\ &= 2^n A^n + B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{n-k-1} 2^{n-1} AB \\ &= 2^n A^n + B^n \\ &= 2^n \times 3^{n-1} A + 2^{n-1} B. \end{aligned}$$

Exercice 14

1. $\det(A) = 4 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\det(B) = 9 - 2a$. Ainsi, B est inversible si et seulement si $9 - 2a \neq 0$, i.e. $a \neq \frac{9}{2}$.
   Ainsi, pour $a \neq \frac{9}{2}, B^{-1} = \dfrac{1}{9-2a} \begin{pmatrix} 3 & -a \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

On sait qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -4 & 8 & -14 \\ -3 & 7 & -12 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   La matrice est de rang $2 < 3$, elle n'est donc pas inversible.
2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 6 & -12 & 21 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_1\leftarrow\frac{1}{3}L_1\\ L_2\leftarrow-\frac{1}{3}L_2\\ L_3\leftarrow -L_3}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 7\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3\end{array}\right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7\\ -1 & 3 & -5\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

3. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 12 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{L_1\leftarrow L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 12 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{L_2\leftarrow L_2-12L_1}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -107 & -21 & 0 & 1 & -12\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -107 & -21 & 0 & 1 & -12\end{array}\right)\overset{\substack{L_1\leftarrow 2L_1-9L_2\\ L_3\leftarrow 2L_3+107L_2}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & -9 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -42 & 107 & 2 & -24\end{array}\right)$$

$$\overset{L_1\leftarrow 21L_1+2L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 42 & 0 & 0 & 25 & 4 & -6\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -42 & 107 & 2 & -24\end{array}\right)\overset{\substack{L_1\leftarrow\frac{1}{42}L_1\\ L_2\leftarrow\frac{1}{2}L_2\\ L_3\leftarrow-\frac{1}{42}L_3}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{42} & \frac{4}{42} & -\frac{6}{42}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{42} & -\frac{2}{42} & \frac{24}{42}\end{array}\right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\dfrac{1}{42}\begin{pmatrix} 25 & 4 & -6\\ 21 & 0 & 0\\ -107 & -2 & 24\end{pmatrix}$.

4. La matrice est de déterminant $-14\neq 0$ donc est inversible d'inverse $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

5. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{\substack{L_2\leftarrow 5L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow 5L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 36 & -3 & 5 & 0\\ 0 & -24 & 29 & -2 & 0 & 5\end{array}\right)\overset{\substack{L_1\leftarrow 2L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3+6L_2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & -30 & 5 & -5 & 0\\ 0 & 4 & 36 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 245 & -20 & 30 & 5\end{array}\right)\overset{\substack{L_1\leftarrow 49L_1+6L_3\\ L_2\leftarrow 245L_2-36L_3}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 490 & 0 & 0 & 125 & -65 & 30\\ 0 & 980 & 0 & -15 & 145 & -180\\ 0 & 0 & 245 & -20 & 30 & 5\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_1\leftarrow\frac{1}{490}L_1\\ L_2\leftarrow\frac{1}{980}L_1\\ L_3\leftarrow\frac{1}{245}L_3}}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{125}{490} & -\frac{65}{490} & \frac{30}{490}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{980} & \frac{145}{980} & -\frac{180}{980}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{20}{245} & \frac{30}{245} & \frac{5}{245}\end{array}\right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\frac{1}{980}\begin{pmatrix} 250 & -130 & 60\\ -15 & 145 & -180\\ -80 & 120 & 20\end{pmatrix}=\frac{1}{196}\begin{pmatrix} 50 & -26 & 12\\ -3 & 29 & -36\\ -16 & 24 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice 16

1. On a

$$\begin{aligned}(A-2\mathrm{I}_3)(A-3\mathrm{I}_3) &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2\\ 3 & -4 & -2\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2\\ 3 & -5 & -2\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{(A-2\mathrm{I}_3)(A-3\mathrm{I}_3)=0_3.}$

2. En développant la relation obtenue à la question précédente, on obtient $A^2-5A+6\mathrm{I}_3=0$ d'où $5A-A^2=6\mathrm{I}_3$ ou encore
$$\frac{1}{6}(5\mathrm{I}_2-A)A=\mathrm{I}_3,$$
ce qui assure que A est inversible et que $A^{-1}=\dfrac{1}{6}(5\mathrm{I}_2-A)$.

Ainsi, $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}0&4&2\\-3&7&2\\3&-4&1\end{pmatrix}}$.

Exercice 17

La matrice M est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(M)=3$. Déterminons le rang de M en fonction de a.

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\1&1&a\\2&1&a\end{pmatrix}\underset{L_3-2L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}}\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1-a&a\\0&1-2a&a\end{pmatrix}\overset{L_2\leftarrow 2L_2-L_3}{\Longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&1-2a&a\end{pmatrix}\overset{L_3\leftarrow L_3+(2a-1)L_2}{\Longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&2a^2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(M)=3$ si et seulement si $a\neq 0$. Donc M est inversible si et seulement si $a\neq 0$.

Exercice 18

1. (a) On a $\det(P)=-2\neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ puis
$$P^{-1}AP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2\\4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=D.$$
   (b) Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2^n\\1&-2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$
   donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^n&1-2^n\\1-2^n&1+2^n\end{pmatrix}$
2. (a) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(3u_n-v_n)\\\frac{1}{2}(-u_n+3v_n)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=AU_n.$$
   On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n\in\mathbb{N}, U_n=A^nU_0$.
   (b) Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=U_n=A^nU_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^n&1-2^n\\1-2^n&1+2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^n&1-2^n\\1-2^n&1+2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^n\\1-2^n\end{pmatrix}$$
   donc pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{1}{2}(1+2^n)$ et $v_n=\dfrac{1}{2}(1-2^n)$.

Exercice 19

1. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On a
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+b & -b+c & -c+a \\ -a+c & -b+a & -c+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & -b+c & -c+a \\ 0 & -b+a & -c+b \end{pmatrix}$.
3. Remarquons que A est inversible si et seulement si $P^{-1}AP$ est inversible.
   En effet, si A est inversible, alors $P^{-1}AP$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   Réciproquement, supposons que $P^{-1}AP$ est inversible. Alors $A = P(P^{-1}AP)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   Or, si $a+b+c = 0$, alors $P^{-1}AP$ possède une colonne nulle donc n'est pas inversible, ce qui implique que A n'est pas inversible dans ce cas.

Exercice 20

1. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$,
   $$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A^{k+1} = A^0 - A^p = I_n - A^p.$$
2. Supposons que $A^n = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que
   $$(I_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k = I_n - A^n = I_n$$
   donc $(I_n - A)$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

Exercice 21

Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $A^p = B^q = 0_n$.
Puisque A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on a
$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}.$$
• Si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ par hypothèse.
• Si $k \leqslant p-1$, alors $p+q-1-k \geqslant q$ donc $B^{p+q-1-k} = 0$ par hypothèse.
Ainsi, pour tout $k \in [\![0, p+q-1]\!]$, $A^k B^{p+q-1-k} = 0$ donc tous les termes de la somme sont nuls.
Ainsi, $(A+B)^{p+q-1} = 0$, ce qui prouve que $\boxed{A+B \text{ est nilpotente.}}$

Exercice 22

1. On a, pour tout réel t,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) + y(t) \\ x(t) + 2y(t) \end{pmatrix}.$$

   On peut écrire cela sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, en posant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   on a bien

$$X'(t) = AX(t).$$

2. On veut montrer que $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Commençons par calculer P^{-1}. On a

$$\det(P) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0,$$

   donc P est inversible, et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Calculons maintenant PDP^{-1} :

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

   puis

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

   On a donc bien $A = PDP^{-1}$.

3. On pose, pour tout réel t,

$$Y(t) = P^{-1}X(t).$$

   Alors, en dérivant,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t).$$

   Or $X'(t) = AX(t)$ et $A = PDP^{-1}$, donc

$$Y'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) = DY(t),$$

   puisque $P^{-1}P = I_2$.
   Écrivons $Y(t)$ sous la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle $Y'(t) = DY(t)$ devient alors

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système découplé :

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t), \\ y_2'(t) = y_2(t). \end{cases}$$

Les solutions générales de ces équations sont

$$y_1(t) = C_1 e^{3t}, \qquad y_2(t) = C_2 e^{t},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

4. On a $X(t) = PY(t)$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(t) - y_2(t) \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $y_1(t)$ et $y_2(t)$ par leurs expressions, on obtient

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{t} \\ C_1 e^{3t} - C_2 e^{t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions du système (S) sont données par

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}, \\ y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{t}, \end{cases}}$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.