Lycée Fénelon
Année 2025–2026

BCPST1
A. Wassfi

---

# Devoir surveillé de mathématiques n°3

Samedi 29 novembre 2025 (3h)

---

L'énoncé est constitué de cinq exercices, un problème et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction.
Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
**Les résultats doivent être encadrés.**
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

**Les calculatrices sont interdites.**

# Exercice 1 : Un peu de complexes

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de $z_{\mathrm{A}}$ et celle de $z_{\mathrm{B}}$.
2. Dans la suite de l'exercice, $M$ désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\ ;\ 2\pi]$.
   On considère l'application $f$ qui à tout point $M$ de $(\mathcal{C})$, associe $f(M) = M\mathrm{A} \times M\mathrm{B}$.

   (a) Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha.$$

   (b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

   (c) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. (a) En utilisant **2 (c)**, montrer qu'il existe deux points $M$ de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

   (b) En utilisant **2 (c)**, montrer qu'il existe un seul point $M$ de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

# Exercice 2 : Des calculs d'intégrales

Pour tout entier naturel $n$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_0$ et $J_0$.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul.

   (a) En intégrant par parties $I_n$ puis $J_n$, montrer que $I_n$ et $J_n$ satisfont le système

   $$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1, \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

   (b) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions explicites de $I_n$ et $J_n$ en fonction de $n$.

3. (a) Montrer que pour tout réel $x$, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $K$ (on pourra, si on le souhaite, effectuer le changement de variable $u = \cos x$ et utiliser le résultat de la question **3 (a)**).

## Exercice 3 : Équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{(1+x^2)} \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réelle $y$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $(H)$ l'équation différentielle homogène associée à $(E)$ :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \tag{H}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $(H)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une fonction $\lambda$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la solution $f$ qui vérifie $f(1) = 0$.

## Exercice 4 : Équations différentielles du second ordre

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 8y = 0 \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réelle $y$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
2. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$.

Soit $\lambda$ un réel. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{F}$$

d'inconnue une fonction réelle $y$ définie sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(F)$.
   On fera une distinction de cas suivant le signe de $\lambda$.
4. On suppose que $\lambda = \pi^2$.
   (a) Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(F)$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
   (b) Quelle est la période de la fonction $f$ ?

# Exercice 5 : Volume de l'ellipsoïde

## 1 Construction d'une demi-ellipse

Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On définit la fonction $f$ par, pour tout $x \in [-a, a]$ :

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

1. Montrer que la fonction $f$ est paire.
2. Étudier les variations de la fonction $f$.
3. Tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

## 2 Volume d'un ellipsoïde de révolution

On considère le solide $\mathcal{S}$ obtenu en faisant tourner autour de $(Ox)$ la courbe $\mathcal{C}$ définie précédemment (on l'appelle « ellipsoïde de révolution »). On admet que le volume $V$ de $\mathcal{S}$ s'exprime, en unité de volume, par :

$$V = 2\pi \int_0^a f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

4. Calculer $V$.
5. Que retrouve-t-on lorsque $a = b$ ?

## 3 Aire d'une ellipse

On appelle ellipse la réunion des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$, où $\mathcal{C}_1$ est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses. Cette partie propose le calcul de l'aire $A$ de cette ellipse (en unité d'aire). On pose, pour tout réel $x$, l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^{a \sin x} \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t$$

On admet que, pour tout réel $x$, $F(x)$ est bien définie.

6. Déterminer $F(0)$.
7. Montrer que
$$A = 4\frac{b}{a}F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
8. En écrivant la fonction $F$ comme une composée de fonctions, prouver que $F$ est dérivable sur $[0, \pi/2]$, et que pour tout $x \in [0, a]$ :
$$F'(x) = a^2 \cos^2 x.$$
9. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$. En déduire une formule explicite de $F(x)$ sur $[0, \pi/2]$.
10. À l'aide des questions précédentes, établir que :
$$A = \pi ab.$$
11. Quel résultat retrouve-t-on lorsque $a = b$ ?

# Problème

## 1 Étude de la réciproque de la fonction th

On note respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On remarquera en particulier que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée des fonctions ch et sh et les exprimer en fonction des fonctions ch et sh.
2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$.
3. Vérifier que la fonction th est impaire.
4. Calculer la dérivée de th puis montrer que, pour tout réel $x$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - (\operatorname{th} x)^2$.
5. Dresser le tableau de variations de th (on précisera les limites en $+\infty$ et $-\infty$).
6. En résolvant l'équation $\operatorname{th}(x) = y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in ]-1, 1[$, montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et que sa réciproque, notée artanh, a pour expression, pour tout $x \in ]-1, 1[$, $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
7. En déduire que la fonction artanh est dérivable sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in ]-1, 1[$,
$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

## 2 Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E)$ définie sur l'intervalle $J = ]0, 1[$ :

$$y'(x) + \frac{3}{x}\, y(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in J$,
$$\frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$
9. Résoudre l'équation homogène associée à $(E)$.
10. Déterminer une solution particulière puis en déduire l'ensemble solution de l'équation $(E)$.
11. Déterminer la solution de $(E)$ vérifiant la condition $f(\frac{1}{2}) = 0$.

## 3 Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant : déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2\, f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

12. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
13. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si $f$ est solution.
14. Montrer que, si $f$ est solution, $-f$ est aussi solution.
15. Montrer que th est solution du problème posé.