Lycée Fénelon
Année 2025-2026

BCPST1
A. Wassfi

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3
Samedi 29 novembre 2025 (3h)

L'énoncé est constitué de cinq exercices, une problème et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Un peu de complexes

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme exponentielle de z_{A} et celle de z_{B}.

On a $|z_{\mathrm{A}}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |z_{\mathrm{A}}| = \sqrt{2}$. En factorisant ce module :
$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
On a $|z_{\mathrm{B}}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow |z_{\mathrm{B}}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En factorisant ce module :
$z_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\ ;\ 2\pi]$.
On considère l'application f qui à tout point M de $(\mathcal{C})$, associe $f(M) = M\mathrm{A} \times M\mathrm{B}$.

(a) Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha.$$

<u>Méthode 1 :</u> $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}2\mathrm{i}\sin\alpha = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha$.
<u>Méthode 2 :</u>
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha = -2\sin^2\alpha + 2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha = 2\mathrm{i}\sin\alpha(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = 2\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

(b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

On a $M\mathrm{A} = |z_{\mathrm{A}} - z_M| = \left|\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$ et $M\mathrm{B} = |z_{\mathrm{B}} - z_M| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.
On a donc

$$\begin{aligned}
f(M) &= M\mathrm{A} \times M\mathrm{B} \\
&= \left|\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \times \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \\
&= \left|\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\alpha)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{3\pi}{4}+\alpha)}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - (1 + \mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|
\end{aligned}$$

(c) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

D'après le résultat de la question 2. a. :
$f(M)=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}-1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|=\left|2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$
donc $f(M)=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|\left|2\mathrm{i}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$, car $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|=1$.

3. (a) En utilisant **2 (c)**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

$f(M)^2$ est une somme de deux carrés ; elle est minimale puisque $\dfrac{1}{4}>0$, si $\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0 \iff \sin\alpha=\dfrac{3}{4}$.
On a donc $\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}$, d'où :
$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
Il y a donc deux points pour lesquels $f(M)$ est minimale :

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)\quad\text{et}\quad M_2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right).$$

Pour ces deux points la valeur minimale est $f(M)=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

(b) En utilisant **2 (c)**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

On a successivement :
$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1\Rightarrow-2\leqslant2\sin\alpha\leqslant2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\leqslant-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\leqslant-\dfrac{7}{2}\Rightarrow$
$0\leqslant\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2\leqslant\dfrac{49}{4}$.
La valeur maximale de $f(M)$ peut être $\dfrac{49}{4}$. Or
$\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=\dfrac{49}{4}\iff\dfrac{9}{4}+4\sin^2\alpha-6\sin\alpha=\dfrac{49}{4}\iff$
$9+16\sin^2\alpha-24\sin\alpha=49\iff16\sin^2\alpha-24\sin\alpha-40=0\iff$
$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha-5=0\quad(1)$.
En posant $X=\sin\alpha$, l'équation (1) devient :
$2X^2-3X-5=0$ qui a une solution -1 évidente : donc :
$2X^2-3X-5=(X+1)(2X-5)$: l'autre solution est donc $\dfrac{5}{2}$.
On a donc $\sin\alpha=-1\iff\alpha=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ avec k entier, ou $\sin\alpha=\dfrac{5}{2}=2,5$ qui n'a pas de solution.
Il y a donc un point pour lequel $f(M)$ est maximale, le point de coordonnées $(0\ ;\ -1)$ et la valeur de ce maximum est $f(M)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 : Un calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) \sin x \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et J_0.

Calcul de I_0 et J_0.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1,$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) En intégrant par parties I_n puis J_n, montrer que I_n et J_n satisfont le système

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1, \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

Pour I_n : posons $u = \sin x$ et $v' = e^{-nx}$. On a alors $u' = \cos x$ et $v = -\dfrac{1}{n}e^{-nx}$. Ainsi

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}} + \frac{1}{n}J_n.$$

En multipliant par n on obtient

$$nI_n = -e^{-\frac{n\pi}{2}} + J_n \quad \Longleftrightarrow \quad -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}.$$

Pour J_n : posons $u = \cos x$, $v' = e^{-nx}$. Alors $u' = -\sin x$ et $v = -\dfrac{1}{n}e^{-nx}$. D'où

$$J_n = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}I_n,$$

donc, en multipliant par n,

$$nJ_n = 1 + I_n \quad \Longleftrightarrow \quad I_n + nJ_n = 1.$$

Ainsi (I_n, J_n) satisfait bien le système

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1, \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

   (b) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions explicites de I_n et J_n en fonction de n.

D'après la première équation :

$$nJ_n = 1 - I_n \quad \Longrightarrow \quad J_n = \frac{1 - I_n}{n}.$$

En reportant dans la seconde :

$$-nI_n + \frac{1 - I_n}{n} = e^{-\frac{n\pi}{2}}.$$

On multiplie par n :

$$-n^2 I_n + 1 - I_n = ne^{-\frac{n\pi}{2}}.$$

On regroupe les termes en I_n :

$$-(n^2+1)I_n = ne^{-\frac{n\pi}{2}}. - 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_n = \frac{1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}}.}{1+n^2}.}$$

Pour déterminer J_n, on multiplie la première équation par n :

$$nI_n + n^2 J_n = n.$$

On additionne cette relation avec la deuxième équation :

$$(nI_n + n^2 J_n) + (-nI_n + J_n) = n + e^{-\frac{n\pi}{2}}.,$$

ce qui donne :

$$(n^2+1)J_n = n + e^{-\frac{n\pi}{2}}. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{J_n = \frac{n + e^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2}.}$$

3. (a) Montrer que pour tout réel x, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

On peut appliquer la formule d'addition pour tout réel x :

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x.$$

Or on sait que

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

On en déduit

$$\cos(3x) = (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x\cos x.$$

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient

$$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x.$$

On regroupe les termes :

$$\cos(3x) = (2\cos^3 x + 2\cos^3 x) + (-\cos x - 2\cos x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

(b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale K (on pourra, si on le souhaite, effectuer le changement de variable $u = \cos x$ et utiliser le résultat de la question **3 (a)**).

En utilisant le résultat précédent,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\ \sin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(4\cos^3 x - 3\cos x\big) \sin x \, \mathrm{d}x.$$

On effectue le changement de variable

$$u = \cos x.$$

Alors

$$du = -\sin x \, \mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x \, \mathrm{d}x = -du.$$

Il faut également changer les bornes :

$$x = 0 \ \Rightarrow\ u = \cos 0 = 1, \qquad x = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ u = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Ainsi

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(4\cos^3 x - 3\cos x\big) \sin x \, \mathrm{d}x = \int_{u=1}^{u=0} (4u^3 - 3u)(-du) = \int_0^1 (4u^3 - 3u)\, du.$$

On calcule cette intégrale polynomiale :

$$\int_0^1 (4u^3 - 3u)\, du = \left[u^4 - \frac{3}{2}u^2\right]_0^1 = \left(1 - \frac{3}{2}\right) - (0 - 0) = -\frac{1}{2}.$$

On obtient donc

$$\boxed{K = -\frac{1}{2}.}$$

Exercice 3 : Équations différentielles du premier ordre

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{(1+x^2)} \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réel y définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \tag{H}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$ donc $y : x \mapsto \lambda e^{-\ln x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ d'où

$$\boxed{S = \{y : x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

2. Déterminer une fonction λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ particulière de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

On cherche une fonction dérivable λ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$$

soit une solution particulière de (E).
Calculons y_p' :

$$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}.$$

En substituant dans (E) :

$$\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les termes en $\lambda(x)$ se simplifient :

$$\frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On obtient donc

$$\lambda'(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Intégrons :

$$\lambda(x) = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K,$$

où K est une constante réelle. On peut choisir pour obtenir une particulière la constante $K = 0$ (la constante non nulle donnera simplement une contribution absorbée par la solution homogène). Ainsi on peut prendre

$$\boxed{\lambda(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

et une solution particulière est

$$\boxed{y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{1}{2x}\ln(1+x^2)\,.}$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'homogène :

$$y(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{2x}\ln(1+x^2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut factoriser :

$$\boxed{S = \left\{ y(x) = \frac{1}{x}\left(\lambda + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. Déterminer la solution f qui vérifie $f(1) = 0$.

On impose la condition initiale en $x = 1$:

$$f(1) = C + \frac{1}{2}\ln(1+1^2) = C + \frac{1}{2}\ln 2 = 0.$$

Donc $C = -\frac{1}{2}\ln 2$.
La solution recherchée a pour expression (pour $x > 0$) :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right).$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) \quad (x > 0).}$$

Exercice 4 : Équations différentielles du second ordre

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 8y = 0 \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réel y définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Cette équation est linéaire, homogène, à coefficients constants. On cherche alors les solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 8 = 0.$$

On a :

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36.$$

Les racines sont donc

$$r_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2, \qquad r_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Les racines étant réelles et distinctes, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{S = \left\{y(x) = Ae^{2x} + Be^{-4x}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$.

On note $f = y$. On impose les conditions à la solution générale :

$$f(x) = Ae^{2x} + Be^{-4x}.$$

Avec les conditions imposées, on a :

$$\begin{cases} f(0) = 3, \\ f'(0) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} Ae^{2\cdot 0} + Be^{-4\cdot 0} = 3, \\ 2Ae^{2\cdot 0} - 4Be^{-4\cdot 0} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 3, \\ 2A - 4B = 0. \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 2A - 4B = 0 \iff A - 2B = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire

$$A = 2B.$$

En remplaçant dans la première :

$$2B + B = 3 \implies 3B = 3 \implies B = 1.$$

Puis

$$A = 2B = 2.$$

La solution vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$ a donc pour expression

$$\boxed{y(x) = 2e^{2x} + e^{-4x}.}$$

Soit λ un réel. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{F}$$

d'inconnue une fonction réel y définie sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (F).
   On fera une distinction de cas suivant le signe de λ.

On distingue plusieurs cas suivant le signe de λ.

Cas 1 : $\lambda = 0$

L'équation devient
$$y'' = 0.$$
On intègre deux fois et on obtient l'ensemble solution :

$$\boxed{\text{Si } \lambda = 0, \quad S = \left\{ y : x \mapsto Ax + B,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Cas 2 : $\lambda > 0$

On pose $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. L'équation caractéristique est

$$r^2 + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2 = -\lambda = -\omega^2.$$

On obtient
$$r = \pm i\omega.$$
Les solutions réelles associées à des racines imaginaires pures sont des combinaisons de sinus et cosinus :

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 0, \quad S = \left\{ y : x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \omega = \sqrt{\lambda} \right\}.}$$

Cas 3 : $\lambda < 0$

On pose $\mu = \sqrt{-\lambda} > 0$, de sorte que $\lambda = -\mu^2$. L'équation devient

$$y'' - \mu^2 y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - \mu^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm\mu.$$

On obtient

$$\boxed{\text{Si } \lambda < 0, \quad S = \left\{ y : x \mapsto Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\ A, B \in \mathbb{R},\ \mu = \sqrt{-\lambda} \right\}.}$$

4. On suppose que $\lambda = \pi^2$.
   (a) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (F) vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Avec $\lambda = \pi^2$, les solutions de (F) sont

$$y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x).$$

Condition $f(0) = 0$:

$$y(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A = 0.$$

Ainsi

$$y(x) = B\sin(\pi x).$$

Condition $f(1) = 0$:

$$y(1) = B\sin(\pi) = 0.$$

Or $\sin(\pi) = 0$, donc cette condition est automatiquement satisfaite pour tout $B \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{y : x \mapsto B\sin(\pi x), \qquad B \in \mathbb{R}.}$$

(b) Quelle est la période de la fonction f ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+2) = B\sin(\pi(x+2)) = B\sin(\pi x + 2\pi) = B\sin(\pi x)$ car sin est 2π-périodique. Donc y est 2-périodique.

Exercice 5 : Volume de l'ellipsoïde

1 Construction d'une demi-ellipse

Soit a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f par, pour tout $x \in [-a, a]$:

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

1. Montrer que la fonction f est paire.

Pour tout $x \in [-a, a]$, on a

$$f(-x) = b\sqrt{1 - \frac{(-x)^2}{a^2}} = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = f(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [-a, a]$, $f(-x) = f(x)$: la fonction f est paire.

2. Étudier les variations de la fonction f.

— Dérivabilité.

Sur l'intervalle ouvert $]-a;a[$, on a $1-\dfrac{x^2}{a^2}>0$, donc la racine carrée est dérivable, et f est dérivable sur $]-a;a[$.
Posons, pour $x\in]-a;a[$,

$$f(x)=b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}.$$

Par dérivation,

$$f'(x)=b\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2}\cdot\left(-\frac{2x}{a^2}\right)=-\frac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.$$

Pour $x\in]-a;a[$, le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$:

$$\begin{cases} f'(x)>0 & \text{si } x<0,\\ f'(x)=0 & \text{si } x=0,\\ f'(x)<0 & \text{si } x>0.\end{cases}$$

— Variations de f.

On en déduit :

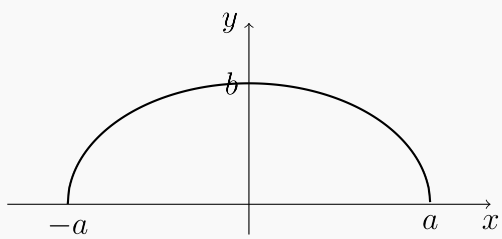
- f est croissante sur $[-a,0]$,
- f est décroissante sur $[0,a]$.

Calculons quelques valeurs remarquables :

$$f(0)=b\sqrt{1-0}=b,\qquad f(a)=b\sqrt{1-1}=0,\qquad f(-a)=0.$$

Le maximum de f sur $[-a,a]$ est donc atteint en 0, et vaut b.

3. Tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.



2 Volume d'un ellipsoïde de révolution

On considère le solide $\mathcal{S}$ obtenu en faisant tourner autour de (Ox) la courbe $\mathcal{C}$ définie précédemment (on l'appelle « ellipsoïde de révolution »). On admet que le volume V de $\mathcal{S}$ s'exprime, en unité de volume, par :

$$V=2\pi\int_0^a f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

4. Calculer V.

Pour tout $x \in [-a, a]$, on a
$$f(x)^2 = b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big).$$
Ainsi,
$$V = 2\pi \int_0^a b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)\,\mathrm{d}x = 2\pi b^2 \int_0^a \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)\,\mathrm{d}x.$$
Calculons l'intégrale :
$$\int_0^a \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{a^2}\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = a - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}.$$
D'où
$$V = 2\pi b^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

5. Que retrouve-t-on lorsque $a = b$?

Si $a = b$, on obtient
$$V = \frac{4}{3}\pi a^3,$$
ce qui est précisément le volume d'une sphère de rayon a.

3 Aire d'une ellipse

On appelle ellipse la réunion des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$, où $\mathcal{C}_1$ est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses. Cette partie propose le calcul de l'aire A de cette ellipse (en unité d'aire). On pose, pour tout réel x, l'intégrale :
$$F(x) = \int_0^{a\sin x} \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$
On admet que, pour tout réel x, $F(x)$ est bien définie.

6. Déterminer $F(0)$.

On a
$$F(0) = \int_0^{a\sin 0} \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{0} \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

7. Montrer que
$$A = 4\frac{b}{a}F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

L'ellipse est symétrique par rapport aux axes du repère, donc son aire totale A est quatre fois l'aire de la partie située dans le premier quadrant (où $x \in [0, a]$ et $y = f(x) \geq 0$) :

$$A = 4 \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in [0, a]$,

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Donc

$$\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Par définition de F, on remarque que

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{a \sin(\pi/2)} \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{b}{a} F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

et donc

$$A = 4 \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = 4\frac{b}{a} F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

C'est bien l'égalité demandée :

$$A = 4\frac{b}{a} F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

8. Prouver que la fonction F est dérivable sur $[0, \pi/2]$, et que pour tout $x \in [0, a]$:

$$F'(x) = a^2 \cos^2 x.$$

On peut écrire F comme une composée :

$$F(x) = G\big(u(x)\big), \text{ où } G(u) = \int_0^u \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u(x) = a \sin x, \text{ avec } x \in [0, a]$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{a^2 - t^2}$ est continue sur l'intervalle $[-a, a]$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction G est dérivable sur $]-a, a[$ et

$$G'(u) = \sqrt{a^2 - u^2}.$$

Par ailleurs, la fonction $u(x) = a \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u'(x) = a \cos x$. Ainsi, pour tout x tel que $u(x) \in]-a, a[$ (c'est le cas sur $[0, \pi/2]$), la composée $F(x) = G(u(x))$ est dérivable et

$$F'(x) = G'\big(u(x)\big)\, u'(x) = \sqrt{a^2 - (a \sin x)^2} \cdot a \cos x = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 x)} \cdot a \cos x.$$

Or $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, donc $F'(x) = \sqrt{a^2 \cos^2 x} \cdot a \cos x$.
Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a $\cos x \geq 0$, donc $\sqrt{a^2 \cos^2 x} = a \cos x$. Par conséquent,

$$F'(x) = a \cos x \cdot a \cos x = a^2 \cos^2 x.$$

9. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$. En déduire une formule explicite de $F(x)$ sur $[0, \pi/2]$.

On sait que pour tout $x \in [0, \pi/2]$:

$$F'(x) = a^2 \cos^2 x.$$

On utilise l'identité trigonométrique

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Dès lors,

$$F'(x) = a^2 \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{a^2}{2}\big(1 + \cos(2x)\big).$$

On primitive cette fonction et on obtient pour tout réel $x \in [0, a]$:

$$F(x) = \frac{a^2}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit que $C = 0$. On obtient donc, pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$F(x) = \frac{a^2}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

On peut aussi écrire, en utilisant $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,

$$F(x) = \frac{a^2}{2}\big(x + \sin x \cos x\big).$$

10. À l'aide des questions précédentes, établir que :

$$A = \pi ab.$$

Nous avons montré que

$$A = 4\frac{b}{a}F\Big(\frac{\pi}{2}\Big).$$

Utilisons maintenant l'expression explicite de $F(x)$:

$$F\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\pi\right)\right) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4},$$

puisque $\sin(\pi) = 0$.
Ainsi,

$$A = 4\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

11. Quel résultat retrouve-t-on lorsque $a = b$?

Dans le cas particulier où $a = b$, on obtient

$$A = \pi a^2,$$

qui est exactement l'aire d'un disque de rayon a.

Problème

4 Étude de la réciproque de la fonction th

On note respectivement $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}$ et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On remarquera en particulier que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée des fonctions ch et sh et les exprimer en fonction des fonctions ch et sh.

ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\operatorname{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

et

$$\operatorname{sh}' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Ainsi $\boxed{\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}}$ et $\boxed{\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}}$.

2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$.

On peut vérifier ceci directement à partir des définitions. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4}.$$

Le numérateur vaut

$$(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 4,$$

donc $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{4}{4} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(Autre méthode : poser $g(x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$. On montre $g'(x) = 0$ grâce aux dérivées ci-dessus et $g(0) = 1$, donc $g = 1$.)

3. Vérifier que la fonction th est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{th}(x)$$

Ainsi th est impaire.

4. Calculer la dérivée de th puis l'exprimer en fonction de th.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en dérivant la fonction $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ (quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}' x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

En utilisant l'identité précédente $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ on obtient

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Or $\operatorname{th}^2 x = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$, donc $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
Donc on peut écrire, pour tout réel x,

$$\boxed{\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

5. Dresser le tableau de variations de th (on précisera les limites en $+\infty$ et $-\infty$).

Puisque pour tout réel x, $\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$, on en déduit que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Calcul des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$

et de même $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.
On a ainsi :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$		$+$	
$\operatorname{th}(x)$	-1	$\nearrow$	1

6. En résolvant l'équation $\operatorname{th}(x) = y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$, montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et que sa réciproque, notée artanh, a pour expression, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

th est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$ donc réalise bien une bijection entre ces deux ensembles.
Soit $y \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\text{th}\, x = y$. On a, à partir de l'expression exponentielle de th :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

On a alors :

$$y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1 \iff ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \iff e^{2x}(1-y) = 1+y,$$

donc

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Ainsi, pour tout réel $y \in]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\text{th}\, x = y$ ce qui signifie que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que sa réciproque a pour expression

$$\boxed{\text{artanh}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}, \qquad y \in]-1,1[.$$

7. En déduire que la fonction artanh est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in I$,

$$\text{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

artanh est d'abord bien définie car pour tout $x \in]-1;1[$, $1-x \neq 0$,
On dérive directement à l'aide des règles de dérivation usuelles. Pour tout réel $x \in]-1;1[$:

$$\text{artanh}'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\dfrac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}}.$$

Calculons le numérateur :

$$\frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Ainsi,

$$\text{artanh}'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1-x^2} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Conclusion :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

5 Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'(x) + \frac{3}{x}\, y(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

8. Montrer que pour tout $x \in J$,

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$

Soit $x \in J$, comme $\dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{x^2-1+1}{1-x^2} = -1 + \dfrac{1}{1-x^2}$, on a :

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

De plus $\dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{1+x+1-x}{2(1-x^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. D'où, pour tout $x \in J$:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

9. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

La solution de l'équation homogène s'écrit (avec $C \in \mathbb{R}$) :

$$y_H(x) = C\exp\Big(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = C\exp(-3\ln x) = Cx^{-3} = \frac{C}{x^3}.$$

Ainsi, la solution de l'équation homogène sur $]0,1[$ est de la forme $\boxed{y_H : x \mapsto \dfrac{C}{x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}.}$

10. Déterminer une solution particulière puis en déduire l'ensemble solution de l'équation (E).

Pour la solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante. On pose $y_P(x) = C(x) \times x^{-3}$ et on a :

$$\big(y_P(x)\big)' + \frac{3}{x}\, y_P(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$C'(x)x^{-3} - 3x^{-4}C(x) + 3C(x)x^{-4} = C'(x)x^{-3} = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$C'(x) = x^3 \cdot \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Intégrons :

$$C(x) = \int \frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -1 + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\mathrm{d}x.$$

Donc

$$C(x) = -x - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Donc

$$y_P(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{-x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x^3}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est :

$$\boxed{S_E = \left\{ y : x \mapsto \frac{-x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C}{x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}. \right\}}$$

11. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 0$.

On impose $f(1/2) = 0$. Pour $x = \frac{1}{2}$ l'expression donne

$$0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) + C}{(\frac{1}{2})^3}.$$

Comme $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \neq 0$, le numérateur doit être nul :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3 + C = 0.$$

D'où

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 3.$$

La solution cherchée est donc

$$\boxed{y(x) = \frac{-x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 3}{x^3}, \qquad x \in]0,1[.}$$

6 Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant : déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2\,f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

12. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

Soit f une fonction constante égale à c. L'équation devient :

$$c = \frac{2c}{1 + c^2}.$$

Si $c = 0$, l'égalité est vérifiée. Sinon, on peut simplifier par $c \neq 0$:

$$1 + c^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 1.$$

Ainsi, les fonctions constantes solutions sont celles d'expression pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\boxed{f(x) = 0, \quad f(x) = 1, \quad f(x) = -1.}$$

13. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

En prenant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle :

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1 + f(0)^2}.$$

On obtient la même équation que précédemment, donc :

$$f(0) \in \{0, 1, -1\}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = \pm 1.}$$

14. Montrer que, si f est solution, $-f$ est aussi solution.

Soit g la fonction d'expression $g(x) = -f(x)$. Alors, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$g(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1 + f(x)^2} = \frac{2(-f(x))}{1 + (-f(x))^2} = \frac{2g(x)}{1 + g(x)^2}.$$

Ainsi, g satisfait la même équation fonctionnelle. Donc :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est solution, alors } -f \text{ l'est aussi.}}$$

15. Montrer que th est solution du problème posé.

Soit x un réel. On a :

$$\operatorname{sh}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2}.$$

donc

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.}$$

Pour $\operatorname{ch}(2x)$:

$$\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\operatorname{ch}^2 x - 1.$$

À partir des identités précédentes :

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \frac{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $\operatorname{ch}^2 x$, on obtient

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{1 + \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^2} = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

D'où la formule : $\boxed{\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.}$

Ainsi la fonction th est bien solution du problème posé.