Devoir maison n°7
A rendre pour le mercredi 7 janvier 2026

Exercice

Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ (\lambda-1)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Discuter selon les valeurs de λ.

Problème

1 Etude d'une suite récurrente

Dans ce problème, on étudie l'équation notée (E)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 2^n$$

d'inconnue la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notée plus simplement (u_n).

On note (H) l'équation homogène associée c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On note S_E l'ensemble des suites solutions de (E) et S_H l'ensemble des suites solutions de (H).

1. Résoudre l'équation (H).
2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\alpha n + \beta)2^n$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de α et β, la suite (v_n) est-elle solution de (E) ?
3. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n}{6}2^n$.
   Montrer que $(u_n) \in S_E \Longleftrightarrow (u_n - v_n) \in S_H$.
4. En déduire l'ensemble S_E.
5. En prenant $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{7}{3}$, déterminer l'expression de la suite (u_n).

2 Calcul d'une somme

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ (on pensera à la dérivée).
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où (u_n) est la suite obtenue à la question 5 de la partie 1.