Lycée Fénelon
Année 2025–2026

BCPST1
A. Wassfi

Devoir maison n°8
A rendre pour le mercredi 7 janvier 2026

Exercice

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système différentiel :

$$(SD) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 4z(t), \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$(CI) \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1.$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

où A est une matrice réelle de taille 3×3 à préciser.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
3. On pose

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad U(t) = P^{-1}X(t).$$

   (a) Donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.
   (b) Montrer que $U(t)$ vérifie l'équation différentielle matricielle

$$U'(t) = DU(t).$$

   (c) Trouver la solution de $U'(t) = DU(t)$ telle que $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ soient les valeurs trouvées en 3 (a).
   (d) En déduire la solution du système (SD) satisfaisant aux conditions initiales (CI).