BCPST1
A. Wassfi

Programme de colles 11 **Semaine du 15/12**

Questions de cours

Systèmes linéaires

1. Un système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions : explication géométrique dans le cas d'un système 2×2.

Matrices

2. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
3. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
4. Associativité du produit : $A(BC) = (AB)C$.
5. Distributivité du produit : $(A+B)C = AC + BC$.
6. $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA) \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \,|\, A = \lambda I_n$.
7. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.
9. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
10. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercices

Systèmes linéaires

Généralités. Opérations élémentaires. Systèmes équivalents. Systèmes échelonnés. Pivot. Rang d'un système linéaire. Algorithme du pivot de Gauss. Résolution d'un système linéaire. Interprétation géométrique en dimensions 2 ou 3.

Matrices

Définition. Matrice nulle, identité. Matrices diagonales, scalaires. Matrices triangulaires. Opérations sur les matrices (somme, produit, multiplication par un scalaire). Propriétés de ces opérations (commutativité de la somme, associativité, distributivité). Puissance d'une matrice. Matrice nilpotente. Matrices qui commutent. Formule du binôme. Transposée. Propriétés de la transposition. Matrices symétriques et antisymétriques. Lien entre matrice et système linéaire. Rang d'une matrice. Matrice inversible. Propriétés des matrices inversibles. Calcul de l'inverse d'une matrice inversible par l'algorithme du pivot de Gauss. Déterminant pour une matrice de taille $(2,2)$. Propriétés du déterminant. Résolution d'un système de Cramer.