Lycée Fénelon
Année 2025-2026

BCPST1
A. Wassfi

Corrigé du devoir maison n°6
A rendre pour le mercredi 10 décembre 2025

Problème

On note t le temps et $x(t)$ l'effectif des lièvres en fonction du temps. On suppose, pour commencer, que la population est isolée dans un environnement aux ressources abondantes. On propose de modéliser la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx, \tag{1}$$

où r est une constante strictement positive représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (1) de condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.

L'équation (1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La résolution donne :

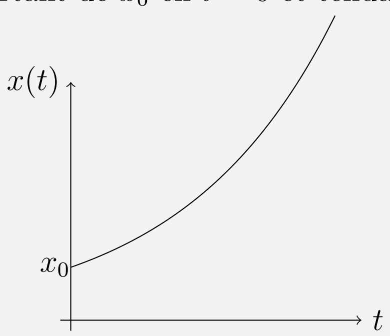
$$x(t) = \lambda e^{rt}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En imposant la condition initiale $x(0) = x_0$ on obtient $\lambda = x_0$, donc

$$\boxed{x : t \mapsto x_0 e^{rt}}. \tag{1}$$

(b) Dessiner à la main l'allure de la solution de (1).

La courbe $x(t) = x_0 e^{rt}$ est strictement croissante (croissance exponentielle). À main levée on trace une courbe partant de x_0 en $t = 0$ et tendant vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$.



(c) Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres avec ce modèle ? L'équation différentielle (1) est-elle une modélisation raisonnable ?

Selon ce modèle, la population croît indéfiniment (croissance exponentielle) et tend vers $+\infty$, ce qui est irréaliste à long terme car les ressources (nourriture, espace...) et les facteurs de mortalité limitent la croissance. Le modèle est éventuellement raisonnable sur de courtes périodes ou lorsque les ressources sont effectivement abondantes, mais il n'est pas adapté pour décrire la dynamique à long terme.

On suppose à présent que les ressources du milieu sont limitées et on modélise la dynamique de population de lièvres par :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

où K est une constante strictement positive.

2. (a) Intuitivement, quelle allure a une solution x de (2) tant que l'effectif de lièvres $x(t)$ reste petit ?

   Si $x(t)$ est petit devant K (c'est-à-dire $x \ll K$), alors $1 - x/K \approx 1$ et l'équation (2) se réduit approximativement à $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \approx rx$. Ainsi, pour faibles effectifs, la population croit approximativement de façon exponentielle : on a donc le même comportement local que le modèle (1).

   (b) En considérant (2), établir le tableau de signes de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de x pour $x \geq 0$.

   On écrit $f(x) = rx(1 - x/K)$. Les racines sont $x = 0$ et $x = K$.
   Pour $x < 0$ le modèle n'a pas de sens biologique mais mathématiquement :

   — pour $0 < x < K$: $x > 0$ et $1 - x/K > 0$ donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0$ (croissance) ;

   — pour $x = 0$ ou $x = K$: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ (points stationnaires) ;

   — pour $x > K$: $x > 0$ mais $1 - x/K < 0$ donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0$ (décroissance).

   On peut résumer dans un tableau de signes :

x	0		K		$+\infty$
$1 - \frac{x}{K}$		$+$	0	$-$	
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$		$+$	0	$-$	

3. Soit x une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. On admet que pour tout $t \geq 0$, $x(t) > 0$. On pose $z(t) = \frac{1}{x(t)}$.

   (a) Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{K} - rz.$$

   On pose $z(t) = 1/x(t)$, avec $x(t) > 0$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

   En substituant $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ tiré de (2) :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{x^2}\big(rx(1 - \tfrac{x}{K})\big) = -r\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{K}\right) = \frac{r}{K} - rz.$$

   Ceci prouve la relation demandée.

   (b) Résoudre cette équation différentielle et exprimer la solution en fonction de t, r, K et $z_0 = z(0)$.

Ł'équation pour z est linéaire du premier ordre. La solution homogène a pour expression

$$z(t) = \lambda e^{-rt}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière (évidente) est $z_p(t) = \dfrac{1}{K}$.
Ainsi, la solution générale s'écrit $z : t \mapsto \lambda e^{-rt} + \dfrac{1}{K}$.
De plus, $z(0) = z_0 = \lambda + \dfrac{1}{K}$ d'où $\lambda = z_0 - \dfrac{1}{K}$.
Donc l'expression de z :

$$z(t) = \frac{1}{K} + \left(z_0 - \frac{1}{K}\right)e^{-rt}.$$

(c) En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de t, r, K et x_0.

Comme $z = 1/x$, on prend l'inverse et on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(z_0 - \frac{1}{K}\right)e^{-rt}}.$$

En remplaçant $z_0 = 1/x_0$ et en simplifiant on obtient la forme classique :

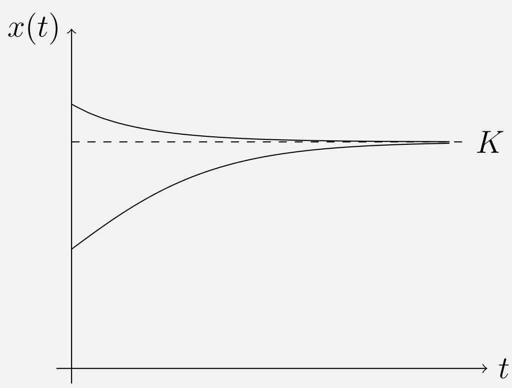
$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \frac{K - x_0}{x_0}e^{-rt}}. \tag{2}$$

Cette formule montre explicitement que $x(t) > 0$ pour tout t et que $x(t) \to K$ quand $t \to +\infty$.

(d) Dessiner à la main l'allure des solutions pour une condition initiale $x_0 < K$ et pour une condition initiale $x_0 > K$.

— Si $0 < x_0 < K$: $x(t)$ croît (car $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t > 0$ tant que $x < K$) et tend vers K (croissance initiale presque exponentielle puis ralentissement en approchant de K).
— Si $x_0 > K$: $x(t)$ décroît et tend vers K (décroissance vers la capacité limite). La trajectoire est monotone vers K.

Un schéma typique peut être tracé :



(e) En s'appuyant sur les réponses précédentes, décrire les différences entre les modèles (1) et (2) et donner une interprétation biologique de la constante K.

Les différences principales :

— Le modèle exponentiel (1) prédit une croissance illimitée (si $r > 0$) et est valide uniquement à faibles densités/à court terme.

— Le modèle logistique (2) introduit une rétroaction négative liée à la densité via le terme $(1 - x/K)$: la croissance ralentit quand x s'approche de K et devient négative si $x > K$. Ainsi (2) modélise la limitation des ressources et la stabilité autour d'une capacité limite.

Biologiquement, K est la capacité de charge de l'environnement : c'est l'effectif maximal que le milieu peut soutenir de façon stationnaire. La solution tend naturellement vers K quel que soit $x_0 > 0$ (stabilité asymptotique de l'état $x = K$), tandis que $x = 0$ est instable (si une petite population apparaît elle croîtra si $r > 0$).