Liste d'exercices n°15 — Géométrie

Exercice 1.
Soient A, B et M trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Exercice 2. Soient A, B et M trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB).
Cette droite est appelée la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathbb{R}^2$. On note $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. Soit α l'angle géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. Cette formule s'appelle la formule d'Al-Kashi.

Exercice 4. Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes.

1. La droite D passant par le point $A(1,2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-7,4)$.
2. La droite D passant par les points $A(1,2)$ et $B(-5,3)$.
3. La droite D passant par $A(1,2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$.
4. La droite D passant par le point $A(1,2)$ et à laquelle le vecteur $\overrightarrow{n} = (-7,4)$ est normal.

Exercice 5. Considérons les points $A(1,1), B(2,4)$ et $C(3,1)$. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Exercice 6. Considérons les points $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.
Déterminer les coordonnées du symétrique I' du point I par rapport à la droite (AC).

Exercice 7. Considérons les trois droites suivantes :

1. D_1 d'équation $x + 3y - 5 = 0$;
2. D_2 d'équation $x - 2y + 5 = 0$;
3. D_3 d'équation $4x - 3y - 10 = 0$.

Calculer l'aire du triangle délimité par ces droites.

Exercice 8. Soient a, b et c trois réels tels que les trois points $A(0,a)$, $B(b,0)$ et $C(c,0)$ soient distincts.

1. Déterminer les équations des trois hauteurs du triangle ABC.
2. Démontrer qu'elles sont concourantes et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 9. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et le point $A(-1,0)$.

1. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
2. Donner l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

Exercice 10. Soient a, b et c trois réels, avec $(a,b) \neq (0,0)$. Soit D la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan.
On définit la distance du point M à la droite D par

$$d(M,D) = \inf_{A\in D} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

1. Montrer que $d(M,D) = \|\overrightarrow{HM}\|$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D.
2. Démontrer que
$$d(M,D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
Indication : fixer un point $A \in D$ et calculer de deux façons différentes $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite D.
3. En déduire les équations des droites passant par $A(4,2)$ et situées à distance 2 de l'origine.

Exercice 11. ABC est un triangle. Le plan est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et on considère les points $R(-1;0)$ et $Q(0;a)$ où a est un nombre réel différent de -1.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontrer que les droites (BC) et (RQ) sont sécantes et que les coordonnées de leur point d'intersection P sont $\left(\dfrac{1-a}{1+a};\dfrac{2a}{1+a}\right)$.
3. M et N sont les points tels que $QCBM$ et $ACPN$ soient des parallélogrammes.
   (a) Calculer les coordonnées des points M et N.
   (b) Démontrer que les points R, M et N sont alignés.

Exercice 12. On munit le plan d'un repère orthonormé. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m^2 \end{pmatrix}$.
A quelle condition sur m, le vecteur $\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de la droite d d'équation $3x-5y-4=0$?

Exercice 13. Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux deux à deux.
Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Dans un repère orthonormé, on considère :

- les points A$(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$, B$(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et C$(3\ ;\ 4\ ;\ -5)$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \qquad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$$

1. Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont-elles coplanaires ?
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $4x+8y+9z+1=0$.
3. Les plans (ABC) et celui d'équation cartésienne $7x-y-2z+6=0$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 15. Donner pour chacun des objets suivants : un point et une base, une représentation paramétrique et une équation cartésienne.

1. La droite du plan d'équation cartésienne $3x - y + 2 = 0$.
2. La droite de l'espace passant par les points $A(1,2,3)$ et $B(4,5,6)$.
3. Le plan de l'espace d'équation cartésienne $3x + 2y + 5z - 4 = 0$.
4. Le plan de l'espace passant par les points $A(1,2,3), B(1,-1,0)$ et $C(3,2,1)$.
5. La droite de l'espace d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z+2 & = & 0 \\ 2x+z & = & 0 \end{array}\right.$.
6. La droite de l'espace obtenue comme intersection des plans $x = 0$ et $y = 1$.
7. La droite de l'espace dont une représentation paramétrique est
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+2\lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & 3-5\lambda \end{array}\right. , \lambda \in \mathbb{R}.$$
8. Le plan de l'espace dont une représentation paramétrique est
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda+\mu \\ y & = & 1-\lambda+2\mu \\ z & = & -2+2\lambda \end{array}\right. , (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 16. Considérons les points $A(1,1,0), B(1,2,4)$ et $C(1,0,1)$.
Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point $D(0,1,2)$ sur le plan (ABC).

Exercice 17.

1. Soient les points $O(0,0,0)$, $A(1,2,1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,1)$ et $D(1,0,4)$.
   (a) Donner des équations cartésiennes des plans (OAB) et (OCD).
   (b) Etudier l'intersection de ces deux plans.
2. Déterminer tous les réels a tels que les droites D_1 et D_2 d'équations
$$(D_1) \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases} \text{et} (D_2) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$$
soient coplanaires.
3. Soient D_3 et D_4 les droites d'équations
$$(D_3) \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y-5z=-2 \end{cases} \text{et} (D_4) \begin{cases} 2x+3y+2z=3 \\ y-4z=-5. \end{cases}$$
   (a) Montrer que les droites D_3 et D_4 sont parallèles.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan qui les contient.

Exercice 18. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A$(5\ ;\ -5\ ;\ 2)$, B$(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, C$(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et D$(6\ ;\ 6\ ;\ -1)$. Calculer le volume du tétraèdre ABCD. *On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante. On prendra BCD pour base.*