Liste d'exercices n°15 — Géométrie

Exercice 1. Soient $\vec{u}(3;2)$, $\vec{v}(-1;-5)$ et $\vec{w}(7;1)$ trois vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Décomposer le vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 2. Considérons, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points $\mathrm{A}(-3\,;-5)$, $\mathrm{B}(0\,;-2)$, $\mathrm{C}(4\,;3)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.
2. Calculer les coordonnées du point M telles que ABCM soit un parallélogramme.
3. Soit D un point de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point D de sorte que le triangle ABD soit rectangle en B.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points suivants :

$$\mathrm{A}(-4\ ;\ 3), \mathrm{B}(2\ ;\ 1), \mathrm{C}(0\ ;\ 4)\ \text{ et }\ \mathrm{D}(-6\ ;\ 6).$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ en degrés. Arrondir au dixième.
3. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
4. ABCD est-il un losange ?

Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points A, B et C par leurs coordonnées :

$$\mathrm{A}(a\ ;\ 1), \mathrm{B}(2\ ;\ -1)\ \text{ et }\ \mathrm{C}(5\ ;\ 0).$$

Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 5. ABCD est un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

1. Construire une figure (on placera les points A, B, C, D, E et F).
2. Montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que les droites (EF) et (AG) sont parallèles.
5. Soit m un nombre réel et L le point défini par $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AG}$.
   Déterminer la valeur de m pour que les points E, L et B soient alignés.

Exercice 6. Soit $\overrightarrow{u}(-1;2)$, $\overrightarrow{v}(-4;5)$ et $\overrightarrow{w}(x+2;x^2)$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
2. Déterminer les valeurs de x telles que
   (a) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient orthogonaux ;
   (b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ soit minimal.

Exercice 7.
Soient A, B et M trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Exercice 8. Soient A, B et M trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB).
Cette droite est appelée la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 9. Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathbb{R}^2$. On note $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. Soit α l'angle géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. Cette formule s'appelle la formule d'Al-Kashi.

Exercice 10. Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes.

1. La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-7, 4)$.
2. La droite D passant par les points $A(1, 2)$ et $B(-5, 3)$.
3. La droite D passant par $A(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$.
4. La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et à laquelle le vecteur $\overrightarrow{n} = (-7, 4)$ est normal.

Exercice 11. Considérons les points $A(1, 1), B(2, 4)$ et $C(3, 1)$. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Exercice 12. Considérons les points $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.
Déterminer les coordonnées du symétrique I' du point I par rapport à la droite (AC).

Exercice 13. Considérons les trois droites suivantes :

1. D_1 d'équation $x + 3y - 5 = 0$;
2. D_2 d'équation $x - 2y + 5 = 0$;
3. D_3 d'équation $4x - 3y - 10 = 0$.

Calculer l'aire du triangle délimité par ces droites.

Exercice 14. Soient a, b et c trois réels tels que les trois points $A(0, a)$, $B(b, 0)$ et $C(c, 0)$ soient distincts.

1. Déterminer les équations des trois hauteurs du triangle ABC.
2. Démontrer qu'elles sont concourantes et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 15. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et le point $A(-1, 0)$.

1. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
2. Donner l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

Exercice 16. Soient a, b et c trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan.
On définit la distance du point M à la droite D par

$$d(M, D) = \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

1. Montrer que $d(M, D) = \|\overrightarrow{HM}\|$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D.

2. Démontrer que
$$d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
Indication : fixer un point $A \in D$ et calculer de deux façons différentes $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite D.
3. En déduire les équations des droites passant par $A(4, 2)$ et situées à distance 2 de l'origine.

Exercice 17. ABC est un triangle. Le plan est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et on considère les points $R(-1; 0)$ et $Q(0; a)$ où a est un nombre réel différent de -1.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontrer que les droites (BC) et (RQ) sont sécantes et que les coordonnées de leur point d'intersection P sont $\left(\frac{1-a}{1+a}; \frac{2a}{1+a}\right)$.
3. M et N sont les points tels que $QCBM$ et $ACPN$ soient des parallélogrammes.
   (a) Calculer les coordonnées des points M et N.
   (b) Démontrer que les points R, M et N sont alignés.

Exercice 18. On munit le plan d'un repère orthonormé. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m^2 \end{pmatrix}$.
A quelle condition sur m, le vecteur $\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de la droite d d'équation $3x - 5y - 4 = 0$?

Exercice 19. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux deux à deux.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. Dans un repère orthonormé, on considère :
- les points A$(0 ; 1 ; -1)$, B$(-2 ; 2 ; -1)$ et C$(3 ; 4 ; -5)$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont-elles coplanaires ?
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $4x + 8y + 9z + 1 = 0$.
4. Les plans (ABC) et celui d'équation cartésienne $7x - y - 2z + 6 = 0$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 21. Donner pour chacun des objets suivants : un point et une base, une représentation paramétrique et une équation cartésienne.

1. La droite du plan d'équation cartésienne $3x - y + 2 = 0$.
2. La droite de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3)$ et $B(4, 5, 6)$.
3. Le plan de l'espace d'équation cartésienne $3x + 2y + 5z - 4 = 0$.
4. Le plan de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3), B(1, -1, 0)$ et $C(3, 2, 1)$.
5. La droite de l'espace d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y - z + 2 & = & 0 \\ 2x + z & = & 0 \end{array} \right.$.
6. La droite de l'espace obtenue comme intersection des plans $x = 0$ et $y = 1$.

7. La droite de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3-5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Le plan de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = \lambda+\mu \\ y = 1-\lambda+2\mu \\ z = -2+2\lambda \end{cases}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 22. Considérons les points $A(1,1,0), B(1,2,4)$ et $C(1,0,1)$.
Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point $D(0,1,2)$ sur le plan (ABC).

Exercice 23.

1. Soient les points $O(0,0,0)$, $A(1,2,1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,1)$ et $D(1,0,4)$.
   (a) Donner des équations cartésiennes des plans (OAB) et (OCD).
   (b) Etudier l'intersection de ces deux plans.
2. Déterminer tous les réels a tels que les droites D_1 et D_2 d'équations

$$(D_1) \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases} \text{et} (D_2) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$$

   soient coplanaires.
3. Soient D_3 et D_4 les droites d'équations

$$(D_3) \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y-5z=-2 \end{cases} \text{et} (D_4) \begin{cases} 2x+3y+2z=3 \\ y-4z=-5. \end{cases}$$

   (a) Montrer que les droites D_3 et D_4 sont parallèles.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan qui les contient.

Exercice 24. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A$(5\ ;\ -5\ ;\ 2)$, B$(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, C$(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et D$(6\ ;\ 6\ ;\ -1)$. Calculer le volume du tétraèdre ABCD. *On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule* $V = \frac{1}{3}B \times h$ *où* B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante. On prendra* BCD *pour base.*