16

Suites réelles

Table des matières

16.1 Généralités

16.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1: Suites majorées, minorées, bornées

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq M$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq m$.
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1. • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n$ est majorée par 0 mais n'est pas minorée.

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est bornée puisque majorée par 1 et minorée par -1.

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n n$ n'est ni majorée ni minorée.

Remarque 1. Il est équivalent de dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée (resp. minorée, bornée) et que l'ensemble $\{u_n, n \geq n_0\}$ est majoré (resp. minoré, borné).

Proposition 1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.
La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si il existe un réel positif r tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n| \leq r$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si l'ensemble $\{u_n, n \geq n_0\}$ est borné.

D'après un résultat du chapitre « Nombres réels », ceci équivaut au fait qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n| \leq r$. ■

Définition 2: Suites monotones

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
4. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$.
5. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang n_0.

Remarque 2. • On montre par une récurrence immédiate que si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante (resp. décroissante, resp. constante), alors pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$ (resp. $u_n \leq u_{n_0}$, resp. $u_n = u_{n_0}$).

• Il est possible que ces propriétés ne soient vérifiées qu'à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et on dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante (ou décroissante, ou constante) à partir du rang n_1.

Proposition 2

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n > 0$).
2. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \leq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n < 0$).
3. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si pour tout $n \geq n_0, u_{n+1} - u_n = 0$.

Démonstration. Immédiate d'après la définition. ■

Exemple 2. • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$ est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3n + 1 - 3n + 2 = 3 > 0.$$

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n+1$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 1 - (-2n+1) = -2n - 1 + 2n - 1 = -2 < 0.$$

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \pi$ est constante.

16.1.2 Convergence

Dorénavant, on notera toujours une suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est définie qu'à partir de l'entier n_0, il suffit de poser une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+n_0}$.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$.
   On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers l si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$
   On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$) et l est appelé la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Dans le cas où $l = 0$, deux cas particuliers sont importants :
   (a) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^+ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, 0 < u_n \leq \varepsilon$.
   On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$).
   (b) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^- si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, -\varepsilon \leq u_n < 0$.
   On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$).
   Une suite qui converge est dite convergente ; une suite qui ne converge pas est dite divergente.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) si
   $$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A.$$
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$) si
   $$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A.$$

Remarque 3. • En particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée.

• La convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes. En effet, il suffit qu'une certaine inégalité ait lieu à partir d'un certain rang pour établir qu'une suite est convergente.

• Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

• Pour montrer la convergence d'une suite vers sa limite l, il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| \leq \alpha\varepsilon$ où α est un réel strictement positif qui ne dépend pas de ε. En effet, si ε parcourt $\mathbb{R}_+^*, \alpha\varepsilon$ fait de même.

• Par définition, on a l'équivalence

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on n'a pas forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

En effet, soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On ne peut donc pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ ni $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

Proposition 3: Unicité de la limite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient l et l' deux réels.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et vers l', alors $l = l'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l', il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|u_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N = \max\{n_0, n_1\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - u_N + u_N - l'| \\ &\leq |l - u_N| + |u_N - l'| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|l - l'| \leq \varepsilon$, d'où $|l - l'| = 0$, i.e. $l = l'$. ■

Exemple 3. • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ d'où $|u_n - 0| \leq \varepsilon$.

Ainsi, on a bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

• La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

En effet, soit $A > 0$. On a $v_n \geq A \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq A \Leftrightarrow n \geq A^2$.

On pose $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $n \geq A^2$ d'où $v_n \geq A$. Ainsi, on a bien montré que pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, v_n \geq A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• Toute suite constante est convergente. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à a.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - a| = 0 \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|.$$

Soit $r = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{n_0-1}|, \varepsilon + |l|\}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq r$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ∎

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent également vers le même réel l.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration.

1. • Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.
   Par définition de la convergence, on a
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$
   Montrons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.
   Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $2n \geq n_0$ et $2n+1 \geq n_0$ d'où
   $$|u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon.$$
   Ceci assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.
   • Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que
   $$\forall n \geq n_0, |u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon.$$
   Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$ donc pour tout $n \geq N$, on a
   $$|u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon,$$
   i.e.
   $$\forall n \geq 2N, |u_n - l| \leq \varepsilon,$$
   d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.
2. • Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Par définition, on a
   $$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A.$$
   Montrons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.
   Soit $A > 0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $2n \geq n_0$ et $2n+1 \geq n_0$ d'où
   $$u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \geq A.$$

Ceci assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$.

• Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, u_{2n+1} \geq A.$$

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$ donc pour tout $n \geq N$, on a

$$u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \geq A,$$

i.e.

$$\forall n \geq 2N, u_n \geq A,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ se montre de la même manière en inversant les inégalités.

■

Exemple 4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+} = -1$. Ainsi, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite différente, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente.

En revanche, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = 1$. Ainsi, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Proposition 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
2. La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
3. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang n_0 et si $l' \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $\dfrac{1}{l'}$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.
4. La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$ (la réciproque est fausse).

Démonstration.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   Par définition, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

   $$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

   De même, puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l', il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

   $$|v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

   Soit $N = \max\{n_0, n_1\}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

   $$\begin{array}{rcl} |\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l + \mu l')| & \leq & |\lambda(u_n - l)| + |\mu(v_n - l')| \\ & \leq & |\lambda||u_n - l| + |\mu||v_n - l'| \\ & \leq & (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon, \end{array}$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l + \mu l'$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$
De même, puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l', il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a
$$|v_n - l'| \leq \varepsilon.$$
Enfin, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est bornée. Il existe donc un réel positif r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq r$.
Soit $N = \max(n_0, n_1)$. On a alors pour tout $n \geq N$,
$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \\ &\leq |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \\ &\leq (r + |l'|)\varepsilon, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$.
3. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, v_n \neq 0$. Supposons également que $l' \neq 0$.
Montrons que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $\dfrac{1}{l'}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$,
$$|v_n - l'| \leq \frac{|l'|}{2} \neq 0.$$
En particulier, pour tout $n \geq n_1$,
$$|v_n| = |v_n - l' + l'| \geq ||v_n - l'| - |l'|| = |l'| - |v_n - l'| \geq |l'| - \frac{|l'|}{2} = \frac{|l'|}{2},$$
d'où pour tout $n \geq n_1$, $\dfrac{1}{|v_n|} \leq \dfrac{2}{|l'|}$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2, |v_n - l'| \leq \varepsilon$.
Soit $N = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| &= \left|\frac{l' - v_n}{l' v_n}\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|l'|}\frac{2}{|l'|} \\ &= \frac{2\varepsilon}{|l'|^2} \end{aligned}$$
ce qui assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{l'}$.
D'après l'alinéa précédent, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{l}{l'}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Par définition, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
   $$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a
   $$||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq \varepsilon,$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.

■

Remarque 4. • La réciproque du deuxième alinéa est faux comme le montre l'exemple de la suite définie par $u_n = (-1)^n$. En effet, cette suite n'admet pas de limite puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

En revanche, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, donc elle converge vers 1.

• Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-l \in \mathbb{R}$.

• Dans le cas particulier où on prend la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à $a \in \mathbb{R}$, on trouve que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l \times a$.

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0^+$.
3. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée (en particulier si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ou si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   • Si $l > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
   • Si $l < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.
5. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 5. En effet, si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, elle est minorée car par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, v_n \geq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n \geq \min\{v_0, v_1, \ldots, v_{n_0-1}, 1\}.$$

Démonstration.

1. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
   Soit $A > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq \dfrac{A}{\lambda}$.
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0, \lambda u_n \geq A$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$.
   • Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.
   Alors $-\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc d'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\lambda u_n = +\infty$ d'où
   $$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ d'où
   $$\forall n \geq n_0, 0 < \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon,$$
   ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0^+$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq m$, où $m \in \mathbb{R}$.
   Soit $A > 0$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq A - m$.
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a
   $$u_n + v_n \geq A - m + m = A,$$
   ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
4. • Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l > 0$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |v_n - l| \leq \dfrac{l}{2}$ donc pour tout $n \geq n_0, v_n \geq \dfrac{l}{2} > 0$.
   Soit $A > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, u_n \geq \dfrac{2A}{l} > 0$.
   Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $u_n v_n \geq \dfrac{2A}{l}\dfrac{l}{2} = A$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
   • Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l < 0$.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -v_n = -l > 0$ donc d'après ce qui précède,
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n(-v_n) = \lim_{n\to+\infty} -u_n v_n = +\infty$$
   d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.
5. • Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).
   Soit $A > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que
   $$\forall n \geq n_0, u_n \geq \sqrt{A} > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, v_n \geq \sqrt{A} > 0$$
   d'où pour tout $n \geq \max(n_0, n_1), u_n v_n \geq A$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
   • Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et d'après ce qui précède, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n(-v_n) = \lim_{n\to+\infty} -u_n v_n = +\infty$$
   d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.

■

On a des résultats analogues pour une suite tendant vers $-\infty$:

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0^-$.
3. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée (en particulier si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ou si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   - Si $l > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.
   - Si $l < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
5. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Remarque 6. En effet, si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, elle est majorée car par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq -1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, -1\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les résultats de la proposition précédente à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et prendre l'opposé des résultats obtenus. ■

Proposition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1. (a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Démonstration.

1. (a) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

   Soit $A > 0$.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{A}$ d'où

   $$\forall n \geq n_0, \frac{1}{u_n} \geq A,$$

   ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

   (b) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$, de telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = 0^+$.

   D'après ce qui précède, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{u_n} = +\infty$ d'où

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty.$$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, i.e. il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq r$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{r}$.
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,
   $$|u_n v_n| \leq r|u_n| \leq r\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$
   ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

■

Exemple 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Remarque 7. On retient les règles suivantes quant aux opérations sur les limites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Soient l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' > 0$	ll'	0	ll'
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' < 0$	ll'	0	ll'
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0^+$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0^-$

On a plusieurs formes indéterminées :

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, il peut tout se passer pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$:
   - Si $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 0$.
   - Si $u_n = n$ et $v_n = -n+1$, alors $u_n + v_n = 1$.
   - Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Si $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n + v_n = n - n^2 = n(1-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il peut tout se passer pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$:
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n$, alors $u_n v_n = 1$.
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_n v_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_n v_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple 6. Pour lever une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$ lorsqu'on est en présence de racines, multiplier par la quantité conjuguée permet de lever l'indétermination.

Par exemple, déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

On a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, mentionnons les propriétés importantes suivantes :

Proposition 10

Soit $p \in \mathbb{Z}$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

Démonstration. • Soit $p > 0$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Soit $A > 0$. Pour tout $n \geq A^{\frac{1}{p}}$, on a $n^p \geq A$.
Posons $n_0 = \lfloor A^{\frac{1}{p}} \rfloor + 1$.
Alors pour tout $n \geq n_0, n^p \geq A$.
Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

• Soit $p = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, n^p = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 1$.

• Soit $p < 0$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $-p > 0$, on a montré précédemment qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, n^{-p} \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0, 0 < n^p \leq \varepsilon$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 0$. ■

Remarque 8. Pour déterminer la limite d'expressions polynomiales ou de quotients de polynômes, on factorise par les termes de plus haut degré.

Exemple 7. • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n+3$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = -n^2$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc a priori, la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indéterminée.

Mais en factorisant par n^2, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n = \lim_{n\to+\infty} -n^2+n+3 = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = -1$ donc par produit des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = -\infty.$$

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^3+4}{2n^3-n+5}$. A priori, c'est une forme indéterminée de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty\times 0$.

Pour cela, on factorise le numérateur et le dénominateur par les termes de plus haut degré :

$$\frac{3n^3+4}{2n^3-n+5} = \frac{n^3}{n^3}\frac{3+\frac{4}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}} = \frac{3+\frac{4}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Enfin, mentionnons un dernier résultat que nous démontrerons dans le chapitre « Limites et continuité ».

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
Soit f une application telle que $\lim\limits_{x\to l} f(x) = l'$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l'.$$

Exemple 8. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

16.1.3 Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités

Proposition 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l\in\mathbb{R}$.

1. Si $l>0$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\geq n_0, u_n>0$.
2. Si $l<0$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\geq n_0, u_n<0$.
3. S'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0, u_n>0$ (ou $u_n\geq 0$), alors $l\geq 0$.
4. S'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0, u_n<0$ (ou $u_n\leq 0$), alors $l\leq 0$.

Démonstration.

1. Supposons que $l>0$. Soit $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0, |u_n-l|\leq\varepsilon$, i.e.

$$\forall n\geq n_0, l-\varepsilon\leq u_n\leq l+\varepsilon,$$

d'où pour tout $n\geq n_0$, $u_n\geq l-\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$.

2. Supposons que $l < 0$. Alors la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-l > 0$ donc d'après l'alinéa précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, -u_n > 0$, i.e. pour tout $n \geq n_0, u_n < 0$.
3. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n > 0$ (ou $u_n \geq 0$).
   Supposons par l'absurde que $l < 0$. Alors d'après l'alinéa précédent, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, u_n < 0$, ce qui contredit l'hypothèse que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq 0$.
   L'hypothèse $l < 0$ est donc absurde, ce qui implique que $l \geq 0$.
4. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n < 0$ (ou $u_n \leq 0$).
   Alors pour tout $n \geq n_0, -u_n > 0$ (ou $-u_n \geq 0$) donc d'après l'alinéa précédent, puisque la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-l$, on a $-l \geq 0$ donc $l \leq 0$.

■

Remarque 9. Il faut noter qu'en passant à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Ainsi, si pour tout $n \geq n_0, u_n > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
1. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n > a$ (ou $u_n \geq a$), alors $l \geq a$.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \leq n_0, u_n < a$ (ou $u_n \leq a$), alors $l \leq a$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l - a$. ■

Théorème 2: Théorèmes de comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, alors $u_n \leq v_n$.
1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives l et l', alors $l \leq l'$.

Démonstration.
1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Soit $A > 0$. Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, u_n \geq A$.
   Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq N$, on a alors $A \leq u_n \leq v_n$, ce qui implique que
   $$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On a donc pour tout $n \geq n_0, -v_n \leq -u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -v_n = +\infty$.
   D'après l'alinéa précédent, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$.
   Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = l' - l$.
   Par ailleurs, on a pour tout $n \geq n_0, v_n - u_n \geq 0$. Donc d'après la proposition précédente, ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n \geq 0$, i.e. $l' - l \geq 0$ d'où $l \leq l'$.

■

Exemple 9. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (2 + (-1)^n)n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, 2 + (-1)^n \geq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 10. Il y a des cas où l'on ne peut rien conclure :

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien conclure de l'inégalité $u_n \leq v_n$. Il se peut même que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admette pas de limite.

Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ et $v_n = n+1$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

• Idem si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, on ne peut rien conclure quant à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 3: Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$.
On suppose en outre que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, |u_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique en particulier que pour tout $n \geq n_1, u_n \geq l - \varepsilon$.

De même, puisque la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2, |w_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique en particulier que pour tout $n \geq n_2, w_n \leq l + \varepsilon$.

Posons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.

Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

donc pour tout $n \geq N, l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon$, i.e. $|v_n - l| \leq \varepsilon$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$. ■

Exemple 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x,$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} x - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} x = x$, d'après le théorème des gendarmes, on peut en conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

16.1.4 Théorème de la limite monotone

Théorème 4: Théorème de la limite monotone

1. Toute suite réelle croissante et majorée converge.
2. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Puisqu'elle est majorée, l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure $\sup(A)$.

   Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup(A)$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   Par définition de $\sup(A)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < u_{n_0} \leq \sup(A)$.

   Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$. De plus, par définition de $\sup(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \sup(A)$ donc pour tout $n \geq n_0$, on a

   $$\sup(A) - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \sup(A)$$

   i.e. pour tout $n \geq n_0, -\varepsilon < u_n - \sup(A) \leq 0 < \varepsilon$ d'où

   $$\forall n \geq n_0, |u_n - \sup(A)| < \varepsilon,$$

   ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup(A)$.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = -u_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq -m$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

   D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -u_{n+1} + u_n \geq 0$ puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après l'alinéa précédent, on en déduit qu'elle est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-l$.

■

Remarque 11. • On a donc prouvé qu'une suite croissante et majorée converge vers son plus petit majorant. De même, une suite décroissante et minorée converge vers son plus grand minorant.

• Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Il existe alors une suite à valeurs dans A convergeant vers $\sup(A)$.

En effet, par caractérisation de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \sup(A)$, i.e. $|x_n - \sup(A)| < \frac{1}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, on en conclut alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup(A)$.

De même, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, il existe une une suite à valeurs dans A convergeant vers $\inf(A)$.

Exemple 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$ pour tout entier naturel n non nul.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On montrera plus tard qu'elle converge vers e.

Théorème 5

1. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
2. Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée.

   Soit $A > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, A n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$.

   Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > A$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée.

   Alors la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc d'après l'alinéa précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■

Remarque 12. En revanche, une suite non majorée (mais pas forcément croissante) ne tend pas nécessairement vers $+\infty$.

En effet, considérons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée (car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$) mais ne tend pas vers $+\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\infty$.

16.2 Etude de suites

16.2.1 Limites de suites classiques

Proposition 12: Limite d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ u_0 & \text{si } r = 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- Si $r > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = +\infty$ d'où le résultat.
- Si $r = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ d'où le résultat.
- Si $r < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = -\infty$ d'où le résultat. ■

Proposition 13: Limite d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $q > 1$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$
2. Si $q = 1$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0.$$
3. Si $|q| < 1$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
4. Si $q \leq -1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$. Il s'agit donc de déterminer la limite de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si celle-ci existe.

1. Supposons que $q > 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(q)} = +\infty$ car $\ln(q) > 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_0 \times q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$
2. Supposons que $q = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ donc le résultat en découle.
3. Supposons $|q| < 1$, i.e. $-1 < q < 1$.
   • Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(q)} = 0$ car $\ln(q) < 0$ donc
   $$\lim_{n\to+\infty} u_0 \times q^n = 0.$$
   • Si $q = 0$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 0$ donc le résultat en découle.
   • Si $-1 < q < 0$ alors $0 < -q < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n(-q)^n = 0$ car la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $((-q)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 \times q^n = 0$.
4. Supposons que $q \leq -1$.
   • Si $q = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n u_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{2n} = u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -u_0.$$
   Or, $u_0 \neq -u_0$ car $u_0 \neq 0$ donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites différentes. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
   • Si $q < -1$. Alors $-q > 1$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times (-1)^n(-q)^n$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{2n} = u_0 \times (-q)^{2n} = u_0 \times (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$
   car $q^2 > 1$ et
   $$u_{2n+1} = -u_0 \times (-q)^{2n+1} = qu_0 \times (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ +\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$
   car $q < 0$ et $q^2 > 1$.
   Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

■

16.2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 4: Suites arithmético-géométriques (rappel)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=au_n+b.$$

Remarque 13. • Si $a=0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=b$.
- Si $a=1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b.
- Si $b=0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
- Supposons que $a\neq 1$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R}$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ donc en passant à la limite dans la relation $u_{n+1}=au_n+b$, on obtient $l=al+b$ d'où $l=\dfrac{b}{1-a}$. Ceci légitime la proposition suivante, qui va servir de méthode pour étudier les suites arithmético-géométriques en pratique.

Proposition 14

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique qui vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=au_n+b$. Posons $l=\dfrac{b}{1-a}$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-l$ est géométrique de raison a.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=a^n(u_0-l)+l$.
En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $|a|<1$ ou si $u_0=l$ et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l=\dfrac{b}{1-a}$.

Démonstration. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1}=u_{n+1}-l=au_n+b-\frac{b}{1-a}=au_n-\frac{ab}{1-a}=a\left(u_n-\frac{b}{1-a}\right)=a(u_n-l)=av_n,$$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n=v_0\times a^n=(u_0-l)\times a^n$.
Il s'ensuit que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=v_n+l=a^n(u_0-l)+l$.
D'après l'étude des suites géométriques, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $|a|<1$ (car $a=1$ est impossible ici) et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} a^n(u_0-l)+l=l.$$

■

Exemple 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de premier terme $u_0=2$ qui vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-3$.

Commençons par chercher l tel que $l=\dfrac{1}{2}l-3\Leftrightarrow\dfrac{l}{2}=-3\Leftrightarrow l=-6$.
Posons pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-l=u_n+6$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_{n+1}=u_{n+1}+6=\frac{1}{2}u_n-3+6=\frac{1}{2}u_n+3=\frac{1}{2}(u_n+6)=\frac{1}{2}v_n$$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{u_0+6}{2^n} = \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n - 6 = \dfrac{1}{2^{n-3}} - 6$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-3}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -6$.

16.2.3 Suites adjacentes

Définition 5: Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si elles vérifient les trois propriétés suivantes :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Remarque 14. On ne suppose pas a priori que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.

Exemple 13. Posons pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n - u_n = \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Lemme 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$.
Par définition des suites adjacentes, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n).$$

Puisque les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissante et croissante respectivement, on a $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$.

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Nécessairement (cf. preuve du théorème de la limite monotone), alors $0 = \inf\{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

■

Remarque 15. Avec les mêmes notations que précédemment, on a donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

Théorème 6: Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.
Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

D'après le lemme précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

De même, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0.

D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers une limite l'.

Or, par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = l' - l = 0$ donc $l = l'$.

On en conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite. ■

Remarque 16. • Une fois prouvée la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pouvait simplement remarquer que $v_n = (v_n - u_n) + u_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme somme de suites convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) + \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + l = l.$$

• Avec les mêmes notations que dans la preuve, si on note l la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

Exemple 14. Dans l'exemple pris ci-dessus, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeaient toutes deux vers 1.

16.2.4 Etudes de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette section aux suites définies par récurrence, c'est à dire aux suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application définie sur $\mathcal{D}$. Pour cela, il est donc nécessaire de fixer le premier terme de la suite $u_0 \in \mathcal{D}$ et de s'assurer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est stable par f, i.e. $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Ensuite, il peut être utile de déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vue d'utiliser le théorème de la limite monotone.

Pour cela, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathcal{D}$.

Enfin, on a le théorème important suivant, qui sera démontré dans le chapitre « Limites et continuité ».

Théorème 7

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathcal{D}$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathcal{D}$.
Alors l est un point fixe de f, i.e.

$$l = f(l).$$

Remarque 17. Ce théorème signifie que les limites éventuelles d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à chercher parmi les points fixes de f, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 15. Etudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.

On a bien une suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto x(1 + x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Cherchons les points fixes de f, c'est à dire résolvons l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(1 + x) = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $l = 0$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n(1 + u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Il y a maintenant plusieurs cas selon la valeur de u_0 :

• Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > u_0 > 0$. La suite ne peut donc pas converger vers 0. Elle est donc croissante et non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.

• Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ donc la suite est constante égale à 0 et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• Si $-1 < u_0 < 0$, puisque pour tout $x \in]-1, 0[, -1 < x < f(x) < 0$, l'intervalle $]-1, 0[$ est stable par f et on a pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 < u_n \leq u_{n+1} < 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

La seule limite possible étant 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• Si $u_0 = -1$, on a $u_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• Si $u_0 < -1$, on a $u_1 = f(u_0) > 0$ et donc pour tout $n \geq 1, u_n > 0$ donc on trouve comme dans le premier cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On en conclut donc que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq u_0 \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 18. La monotonie de f donne également des informations intéressantes sur la suite.

• Si f est croissante, alors la suite est monotone.

En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant f(u_1) = u_2$ et on en déduit aisément par récurrence que la suite est croissante.

En revanche, si $u_0 \geqslant u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant f(u_1) = u_2$ et on en déduit aisément par récurrence que la suite est décroissante.

• Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

16.3 Etude asymptotique

16.3.1 Croissances comparées

Pour $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n! = \lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Toutefois, ces trois suites ne tendent pas vers $+\infty$ « à la même vitesse ». L'objet du théorème suivant est de comparer les croissances de ces suites.

Théorème 8: Théorème de croissances comparées

Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Démonstration. • Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$. Soit $N = \lfloor a \rfloor + 1$.
Pour tout $n > N$ on a

$$\frac{n!}{a^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{a} = \prod_{k=1}^{N} \frac{k}{a} \prod_{k=N+1}^{n} \frac{k}{a} > \frac{N!}{a^N} \left(\frac{N}{a}\right)^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque $\frac{N}{a} > 1$, donc par comparaison, on obtient bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

• Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.
On a

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = e^{n\ln(a) - \alpha\ln(n)} = e^{n(\ln(a) - \alpha\frac{\ln(n)}{n})}.$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc puisque $\ln(a) > 0$, on obtient par composition des limites que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n(\ln(a) - \alpha\frac{\ln(n)}{n})} = +\infty$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$. ■

Remarque 19. • Il faut retenir que la factorielle domine les suites géométriques, qui elles-mêmes dominent les suites puissances.

• Ceci implique en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^\alpha} = +\infty$.

Exemple 16. • $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{37}}{3^n} = 0$.

• $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \sqrt{n} = 0$.

16.3.2 Suites équivalentes

Définition 6: Suites équivalentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, i.e. on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$.
On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 20. Dans ce cas, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

Exemple 17. • On a $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $n \sim n+1$.

• On a $\dfrac{\sqrt{n^2-3n+4}}{n} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\sqrt{n^2-3n+4} \sim n.$$

Proposition 15

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n \times \dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \times 1 = l$. ■

Remarque 21. On vient donc de montrer que deux suites équivalentes ont même limite. Mais la réciproque est fausse.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n} = +\infty$.

On a toutefois une réciproque partielle :

Proposition 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite constante égale à l, i.e.

$$u_n \sim l.$$

Démonstration. On a vu qu'une suite qui tend vers une limite non nulle est du signe de cette limite à partir d'un certain rang. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{l} = \frac{l}{l} = 1$$

donc $u_n \sim l$. ■

Remarque 22. En revanche, il est formellement interdit d'écrire $u_n \sim 0$.

La notion d'équivalence vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 17: Propriétés de l'équivalence

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. (Réflexivité) On a $u_n \sim u_n$.
2. (Symétrie) Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
3. (Transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \sim \lambda v_n$.
5. Si $u_n \sim v_n$ alors $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.
6. Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}, u_n^p \sim v_n^p$.
   Si de plus, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stictement positives à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
7. Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.
8. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors
$$u_n w_n \sim v_n x_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}.$$

Démonstration.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
   donc $v_n \sim u_n$.
3. On a
$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   donc $u_n \sim w_n$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors
$$\frac{\lambda u_n}{\lambda v_n} = \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   donc $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.
5. On a
$$\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{v_n}} = \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   donc $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.
6. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\frac{u_n^p}{v_n^p} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   donc $u_n^p \sim v_n^p$.
   Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stictement positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \frac{e^{\alpha \ln(u_n)}}{e^{\alpha \ln(v_n)}} = e^{\alpha(\ln(u_n)-\ln(v_n))} = e^{\alpha \ln(\frac{u_n}{v_n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

par composition de limites.

7. Par composition de limites, puisque $\lim\limits_{x\to 1} |x| = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $|u_n| \sim |v_n|$.

8. On a

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{w_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$$

donc $u_n w_n \sim v_n x_n$ et

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{x_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{x_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$$

donc $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

■

Exemple 18. • On a

$$\frac{\sqrt{n^2+5n-1}}{2n+3} \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2}.$$

• On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\frac{\sin(n)}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - 2\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Remarque 23. En revanche, on ne peut pas additionner les équivalents.

En effet, on a $n \sim n+1$ et $-n \sim -n$ mais on n'a pas $n - n \sim n + 1 - n$ car sinon on aurait $0 \sim 1$!

On ne peut pas non plus les composer par des fonctions. En effet, on a $n \sim n+1$ mais $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1 donc $e^{n+1} \not\sim e^n$.

Les équivalents suivants sont importants et à connaître :

Proposition 18: Equivalents de référence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors

1. $\sin(u_n) \sim u_n$;
2. $\tan(u_n) \sim u_n$;
3. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$;
4. $\ln(1+u_n) \sim u_n$;
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; ,
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Remarque 24. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$.

Démonstration.

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ donc par composition de limites,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1$$
d'où $\sin(u_n) \sim u_n$.
2. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, par composition de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1$. Ainsi, on a
$$\tan(u_n) = \frac{\sin(u_n)}{\cos(u_n)} \sim \frac{u_n}{1} = u_n.$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$. On en déduit que
$$1 - \cos(u_n) = 2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim 2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2}{2}.$$
On peut utiliser l'équivalent $\sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \sim \dfrac{u_n}{2}$ car si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2} = 0$.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc par composition de limites
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$$
donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
5. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$ donc par composition de limites
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1,$$
d'où $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En se servant du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\ln(1+u_n) = 0$ et des deux résultats précédents, on a
$$(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+u_n)} - 1 \sim \alpha\ln(1+u_n) \sim \alpha u_n.$$

■

Exemple 19. On a
$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, signalons la formule de Stirling, qui est un équivalent célèbre, mais que nous ne démontrerons ni n'utiliserons pas :
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$