Lycée Fénelon — BCPST1

Année 2025–2026 — A. Wassfi

Corrigé du devoir maison n°7

A rendre pour le mercredi 10 décembre 2025

Exercice

Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ (\lambda-1)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Discuter selon les valeurs de λ.

On note L_1, L_2, L_3 les trois équations du système dans l'ordre.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ (\lambda-1)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ & & z & & & = & -1 \end{array}\right.$$

On remplace alors z par -1 dans la première équation (ce qui revient à modifier la ligne L_1 en conséquence) :

$$\underset{\text{rempl. } z=-1 \text{ dans } L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 1 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

On effectue encore une combinaison de lignes :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} (\lambda+1)x = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right.$$

On discute alors selon la valeur de λ.

Cas 1 : $\lambda \neq -1$

Si $\lambda + 1 \neq 0$, on peut diviser la première équation par $\lambda + 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda+1)x = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda+1} L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\lambda+1} \\ x - y = 1 \end{array}\right.$$

D'où

$$\frac{1}{\lambda+1} - y = 1 \iff -y = 1 - \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \iff y = -\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

On n'a pas modifié $z = -1$ au cours de ces opérations, donc

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{1}{\lambda+1},\ -\frac{\lambda}{\lambda+1},\ -1\right) \quad \text{pour tout } \lambda \neq -1.}$$

Cas 2 : $\lambda = -1$

Si $\lambda = -1$, le système réduit

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right.$$

En ajoutant les deux équations : $(-x+y)+(x-y) = 0+1 \iff 0 = 1$, ce qui est impossible. Le système est donc **incompatible** pour $\lambda = -1$: il n'admet aucune solution.

Conclusion :

$$\begin{cases} \lambda \neq -1 : & \text{une unique solution } (x,y,z) = \left(\dfrac{1}{\lambda+1},\ -\dfrac{\lambda}{\lambda+1},\ -1\right), \\ \lambda = -1 : & \text{aucune solution.} \end{cases}$$

Problème

1 Etude d'une suite récurrente

Dans ce problème, on étudie l'équation notée (E)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 2^n$$

d'inconnue la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notée plus simplement (u_n).

On note (H) l'équation homogène associée c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On note S_E l'ensemble des suites solutions de (E) et S_H l'ensemble des suites solutions de (H).

1. Résoudre l'équation (H).

   On écrit l'équation caractéristique :

   $$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-2)(r+1) = 0.$$

   Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -1$.
   Comme ces racines sont réelles et distinctes, la solution générale de (H) est de la forme

   $$\boxed{u_n = A\,2^n + B\,(-1)^n, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.}$$

   En particulier,

   $$S_H = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A2^n + B(-1)^n \right\}.$$

2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\alpha n + \beta)2^n$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de α et β, la suite (v_n) est-elle solution de (E) ?

On considère une suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = (\alpha n + \beta)2^n,$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer.
On veut que (v_n) soit solution de (E), c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = 2^n.$$

On commence par calculer les termes nécessaires :

$$v_n = (\alpha n + \beta)2^n,$$

$$v_{n+1} = (\alpha(n+1) + \beta)2^{n+1} = (\alpha n + \alpha + \beta)2^{n+1},$$
$$v_{n+2} = (\alpha(n+2) + \beta)2^{n+2} = (\alpha n + 2\alpha + \beta)2^{n+2}.$$

On considère alors

$$v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = (\alpha n + 2\alpha + \beta)2^{n+2} - (\alpha n + \alpha + \beta)2^{n+1} - 2(\alpha n + \beta)2^n.$$

On factorise 2^n :

$$v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = 2^n \Big[4(\alpha n + 2\alpha + \beta) - 2(\alpha n + \alpha + \beta) - 2(\alpha n + \beta)\Big].$$

Ce qui donne après simplification :

$$v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = 2^n \cdot 6\alpha.$$

Pour que (v_n) soit solution de (E), il faut et il suffit que

$$6\alpha\, 2^n = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad 6\alpha = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{6}.}$$

On remarque que β ne figure pas dans la condition : toute valeur de β convient.
Ainsi, les suites de la forme $(\alpha n + \beta)2^n$ qui sont solutions de (E) sont précisément celles pour lesquelles

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta \in \mathbb{R}.}$$

Un choix simple de solution particulière est par exemple

$$v_n = \frac{n}{6}2^n.$$

3. Montrer que $(u_n) \in S_E \Longleftrightarrow (u_n - v_n) \in S_H$.

$$\begin{aligned}
(u_n) \in S_E &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 2^n \\
&\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n \\
&\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+2} - v_{n+2}) - (u_{n+1} - v_{n+1}) - 2(u_n - v_n) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (u_n - v_n) \in S_H.
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 2^e équivalence le fait que (v_n) une solution particulière de (E).

4. En déduire l'ensemble S_E.

D'après la question 1, toute suite de S_H s'écrit $w_n = A2^n + B(-1)^n$.
D'après la question précédente, pour une solution particulière (v_n) fixée, on a

$$S_E = \{(u_n) \mid \exists (w_n) \in S_H,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + w_n\}.$$

En choisissant par exemple

$$v_n = \frac{n}{6} 2^n,$$

on obtient la forme générale des solutions de (E) :

$$u_n = A2^n + B(-1)^n + \frac{n}{6} 2^n \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc

$$\boxed{S_E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A2^n + B(-1)^n + \frac{n}{6} 2^n \right\}.}$$

5. En prenant $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{7}{3}$, déterminer l'expression de la suite (u_n).

Pour $n = 0$:

$$u_0 = A\,2^0 + B\,(-1)^0 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 2^0 = A + B = 1. \tag{1}$$

Pour $n = 1$:

$$u_1 = A\,2^1 + B\,(-1)^1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2^1 = 2A - B + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

On a

$$2A - B + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2A - B = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2. \tag{2}$$

On résout le système

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2A - B = 2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$(A + B) + (2A - B) = 1 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3A = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 1.$$

En reportant dans (1) :

$$1 + B = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad B = 0.$$

Ainsi, pour ce choix de conditions initiales, on obtient

$$A = 1, \quad B = 0.$$

Par conséquent,

$$u_n = 1 \cdot 2^n + 0 \cdot (-1)^n + \frac{1}{6} n\, 2^n = \left(1 + \frac{n}{6}\right) 2^n = \frac{n + 6}{6}\, 2^n.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = \frac{n + 6}{6}\, 2^n.}$$

6. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x - (n + 1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$ (on pensera à la dérivée).

Pour tout n, la fonction $x \mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant terme à terme :

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Pour $x \neq 1$, on a aussi

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

On dérive cette fonction :

$$S_n'(x) = \frac{(1-x) \cdot (-(n+1)x^n) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

On remarque que

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = xS_n'(x).$$

Ainsi, pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x \cdot \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Pour $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} k1^k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Au total,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} kx^k = \begin{cases} \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}, & \text{si } x \neq 1, \\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$

7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où (u_n) est la suite obtenue à la question 5 de la partie 1.

On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n+6}{6}\, 2^n.$$

On cherche

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On commence par écrire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+6}{6}\, 2^k = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n} (k+6) 2^k = \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{n} k 2^k + 6 \sum_{k=0}^{n} 2^k \right).$$

Or, d'après la question précédente (cas $x = 2$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k 2^k = \frac{2 - (n+1)2^{n+1} + n 2^{n+2}}{(1-2)^2} = 2 - (n+1)2^{n+1} + n2^{n+2},$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{6}\Big(2 - (n+1)2^{n+1} + n2^{n+2} + 6(2^{n+1} - 1)\Big) \\ &= \frac{1}{6}\Big(2 - (n+1)2^{n+1} + n2^{n+2} + 6 \cdot 2^{n+1} - 6\Big) \\ &= \frac{1}{6}\Big((n+5)2^{n+1} - 4\Big). \end{aligned}$$

On peut simplifier encore :

$$S_n = \frac{(n+5)2^{n+1} - 4}{6} = \frac{2\big((n+5)2^n - 2\big)}{6} = \frac{(n+5)2^n - 2}{3}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+5)2^n - 2}{3}.}$$