BCPST1
A. Wassfi

Devoir maison n°8
A rendre pour le mercredi 7 janvier 2025

Exercice

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système différentiel :

$$(SD) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 4z(t), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(CI) \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1.$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

où A est une matrice réelle de taille 3×3 à préciser.

On a :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer P^{-1}.

On cherche l'inverse de

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode du pivot de Gauss, en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes à la matrice augmentée $(P \mid I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient un pivot -1 en position $(2,2)$: on le rend égal à 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On annule maintenant le coefficient 1 au-dessus du pivot en colonne 2 (ligne 1) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On annule ensuite les coefficients au-dessus du pivot en colonne 3 (ligne 3) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a alors obtenu la forme

$$\left(I_3 \,\middle|\, P^{-1}\right),$$

d'où

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrer que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On calcule d'abord

$$DP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On fait le produit ligne par colonne.

Première ligne de DP^{-1} :

$$\begin{cases} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = -1, \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1, \\ (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1. \end{cases}$$

Deuxième ligne :

$$\begin{cases} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0, \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 2, \\ 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -2. \end{cases}$$

Troisième ligne :

$$\begin{cases} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 3, \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = 0, \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -3. \end{cases}$$

On obtient donc

$$DP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite

$$PDP^{-1} = P(DP^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On fait à nouveau le produit ligne par colonne (je vous épargne les détails cette fois-ci). Ainsi,

$$\boxed{PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = A.}$$

3. On pose

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad U(t) = P^{-1}X(t).$$

(a) Donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.

Par définition,

$$U(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{u(0) = 2, \quad v(0) = -1, \quad w(0) = 0.}$$

(b) Montrer que $U(t)$ vérifie l'équation différentielle matricielle

$$U'(t) = DU(t).$$

On a

$$X'(t) = AX(t).$$

En utilisant $X(t) = PU(t)$, on obtient

$$X'(t) = PU'(t).$$

D'autre part,

$$X'(t) = AX(t) = APU(t).$$

Comme $A = PDP^{-1}$,

$$APU(t) = PDP^{-1}PU(t) = PDU(t).$$

Ainsi,

$$PU'(t) = PDU(t).$$

La matrice P étant inversible, on peut multiplier à gauche par P^{-1} :

$$U'(t) = DU(t).$$

On a donc montré que

$$\boxed{U'(t) = DU(t).}$$

(c) Trouver la solution de $U'(t) = DU(t)$ telle que $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ soient les valeurs trouvées en 3 (a).

La matrice D est diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

donc le système $U'(t) = DU(t)$ se réécrit composante par composante :

$$\begin{cases} u'(t) = -\,u(t), \\ v'(t) = -2\,v(t), \\ w'(t) = -3\,w(t). \end{cases}$$

Ce sont des équations différentielles scalaires du premier ordre à coefficients constants.

— $u'(t) = -u(t)$, avec $u(0) = 2$: la solution est

$$u(t) = 2e^{-t}.$$

— $v'(t) = -2v(t)$, avec $v(0) = -1$: la solution est

$$v(t) = -e^{-2t}.$$

— $w'(t) = -3w(t)$, avec $w(0) = 0$: la solution est

$$w(t) = 0 \cdot e^{-3t} = 0.$$

On obtient donc

$$\boxed{U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(d) En déduire la solution du système (SD) satisfaisant aux conditions initiales (CI).

On rappelle que

$$X(t) = PU(t).$$

Ainsi,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \\ y(t) = 2e^{-t}, \\ z(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}. \end{cases}}$$

On vérifie aisément que ces fonctions vérifient le système (SD) et les conditions initiales (CI) :

$$x(0) = 2 - 1 = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 2 - 1 = 1.$$