Liste d'exercices n°16 — Suites réelles

Exercice 1. Etudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$;
2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 2. Calculer les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor}{n}$;
2. $u_n = (-2 + (-1)^n)n$;
3. $u_n = (1 + (-1)^n)n$;
4. $u_n = \dfrac{n^3 - 2n^4 + n^3 \sin(n)}{n^2}$;
5. $u_n = -(2n-1)^6 - (1-3n)^7$;
6. $u_n = \dfrac{n^3(n^2+1)}{n^2(\sin(n) - n^3)}$;
7. $u_n = \dfrac{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}$.

Exercice 3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

1. $u_n = \sqrt{n(n+1)} - n$;
2. $v_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$;
3. $w_n = \left(\dfrac{2^n + 3^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}}$;
4. $x_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k}$;
5. $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Etudier la convergence des suites définies par ces expressions.

Exercice 4. Etudier la convergence des suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = \cos(n) - n$;
2. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin(n)$;
3. $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n^2 + 1}$;
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n) + \sin(n)}{n}$;
5. $u_n = n + (-1)^n \ln(n)$;
6. $u_n = \left(\dfrac{1}{2} \sin(n!)\right)^n$.

Exercice 5. Etudier la convergence des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

1. $u_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$;
2. $v_n = n \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
3. $w_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$;
4. $x_n = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 6. Donner la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Exercice 7. Soit x un réel. Donner la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\lfloor n^2 x \rfloor}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et k un réel de $]0;1[$ tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice 11. On considère les suites ci-dessous :

- $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3. \end{cases}$

Pour chacune de ces suites, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer l'expression de u_n pour tout entier n.
2. Calculer la limite de (u_n).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ puis la limite de cette somme.

Exercice 12. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1, v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n). \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
2. Prouver que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13. On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Démontrer que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14. Soient a et b deux réels strictement positifs.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \leq v_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.
5. En conclure que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Exercice 15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite.
5. Etudier la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer la valeur de la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Exercice 17. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

Exercice 18. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

Exercice 19. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \neq -\dfrac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}.$$

Exercice 20. Soit $a > 0$ fixé. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \neq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 3]$.
3. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers une limite à préciser.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 22. A l'aide d'un équivalent, déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)(\sqrt{n^2 - 1} - n)$;
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n}) - 1}}{\tan(\frac{(-1)^n}{n^2})}$;
4. $u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 23.
Donner un équivalent, ainsi que la nature, des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} k$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(n^3 - 1 + n^2)\ln(1+n^4)}{n^2+1}$;
4. $\forall n \geqslant 1, u_n = \sqrt{n^2+n-1} - n$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n!}\right)\right)$;
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

Exercice 24. Soit la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par

$$f(x) = \sqrt{2-x}\,.$$

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Chercher les points fixes de f (i.e. résoudre $f(x) = x$).
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe de f, la droite d'équation $y = x$, puis construire sur l'axe des abscisses les premiers termes de (u_n). Conjecturer la monotonie des suites $\big(u_{2n}\big)_n$ et $\big(u_{2n+1}\big)_n$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \in [0, 2]$.
3. Soit $h = f \circ f$. Justifier que h est bien définie sur $[0, 2]$ et étudier son sens de variation sur cet intervalle.
4. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2(n+1)} = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1}).$$

   (b) Montrer que $\big(u_{2n}\big)_n$ et $\big(u_{2n+1}\big)_n$ sont monotones (on pourra procéder par récurrence). En déduire leur convergence.
   (c) Établir que

$$h(x) = x \iff \big(x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 2 - x^2 \geq 0\big).$$

   (d) Vérifier que 1 et -2 sont racines du polynôme $x \mapsto x^4 - 4x^2 + x + 2$, et en déduire que h a un unique point fixe, que l'on calculera.
   (e) En déduire les limites de $\big(u_{2n}\big)$ et $\big(u_{2n+1}\big)$ et la convergence de (u_n).
5. À l'aide de la représentation graphique faite en 2.(a), deviner le comportement de (u_n) lorsque $u_0 \in\,]-\infty, 2[$. (On pourra distinguer plusieurs cas.)