Corrigé de la liste d'exercices n°15 — Géométrie

Exercice 1.

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 3 \times (-5) - 2 \times (-1) = -15 + 2 = -13 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. On a : $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b \\ 2a - 5b \end{pmatrix}$.
   On est donc ramené à résoudre le système suivant :
   $$\begin{cases} 7 & = 3a - b \\ 1 & = 2a - 5b \end{cases}$$
   $5 \times L_1 - L_2$ donne $35 - 1 = 15a - 2a$ soit $34 = 13a$ d'où $a = \dfrac{34}{13}$.
   Ainsi, $b = 3a - 7 = 3 \times \dfrac{34}{13} - 7 = \dfrac{102 - 91}{13} = \dfrac{11}{13}$.
   En définitive,
   $$\vec{w} = \frac{34}{13}\vec{u} + \frac{11}{13}\vec{v}$$

Exercice 2. On travaille dans un repère orthonormé avec

$$A(-3; -5), \quad B(0; -2), \quad C(4; 3).$$

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   $$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A) = (0 - (-3)\,;\, -2 - (-5)) = (3\,;\, 3),$$
   $$\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;\, y_C - y_A) = (4 - (-3)\,;\, 3 - (-5)) = (7\,;\, 8).$$
   Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que
   $$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}.$$
   Cela imposerait simultanément
   $$7 = 3k \quad \text{et} \quad 8 = 3k,$$
   ce qui est impossible puisque $7 \neq 8$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Ainsi,
   $$\boxed{\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ ne sont pas alignés.}}$$
2. Dans un parallélogramme $ABCM$ (dans cet ordre), on a
   $$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.$$
   Calculons $\overrightarrow{BC}$:
   $$\overrightarrow{BC}\,(x_C - x_B\,;\, y_C - y_B) = (4 - 0\,;\, 3 - (-2)) = (4\,;\, 5).$$

Notons $M(x_M; y_M)$. Alors

$$\overrightarrow{AM}\,(x_M - x_A\,;\, y_M - y_A) = (x_M - (-3)\,;\, y_M - (-5)) = (x_M + 3\,;\, y_M + 5).$$

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ donne le système

$$\begin{cases} x_M + 3 = 4, \\ y_M + 5 = 5. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x_M = 1, \\ y_M = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{M(1\,;\,0).}$$

3. Comme D appartient à l'axe des abscisses, il s'écrit

$$D(d;0) \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}.$$

Le triangle ABD est rectangle en B si et seulement si

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Calculons $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BA}\,(x_A - x_B\,;\, y_A - y_B) = (-3 - 0\,;\, -5 - (-2)) = (-3\,;\, -3).$$

Calculons $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BD}\,(x_D - x_B\,;\, y_D - y_B) = (d - 0\,;\, 0 - (-2)) = (d\,;\, 2).$$

Alors

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-3) \times d + (-3) \times 2 = -3d - 6.$$

On impose l'orthogonalité :

$$-3d - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3d = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad d = -2.$$

Donc

$$\boxed{D(-2\,;\,0).}$$

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points A, B et C par leurs coordonnées :

$$\mathrm{A}(-4\ ;\ 3), \mathrm{B}(2\ ;\ 1), \mathrm{C}(0\ ;\ 4) \text{ et } \mathrm{D}(-6\ ;\ 6).$$

1. On a : $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   On en déduit que :
   $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -6 \times -2 + 2 \times 3 = 18.$

2. On a de plus :
   $||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32$
   et $||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$.
   $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = ||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|| \times \cos \widehat{\mathrm{ABC}}$
   donc $\cos \widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{BC}}||} = \dfrac{18}{2\sqrt{10} \times \sqrt{13}} \approx 0,789$
   donc $\widehat{\mathrm{ABC}} \approx \cos^{-1}(0,789) \approx 37,9^o$.
3. On calcule les vecteurs opposés du quadrilatère $ABCD$:
   $$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = (6,\ -2)$$
   $$\overrightarrow{DC} = (0 - (-6),\, 4 - 6) = (6,\ -2)$$
   Ainsi,
   $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$
   ABCD est donc un parallélogramme.
4. On sait que $ABCD$ est un parallélogramme. Pour qu'il soit un losange, il faut par exemple que deux côtés consécutifs soient de même longueur (ou encore que les diagonales soient perpendiculaires, etc.).

   Démonstration 1 : comparaison de deux côtés consécutifs Calculons les longueurs AB et BC.

   $$\vec{AB} = (2 - (-4)\,;\, 1 - 3) = (6\,;\, -2) \qquad \Rightarrow \qquad AB^2 = 6^2 + (-2)^2 = 36 + 4 = 40$$

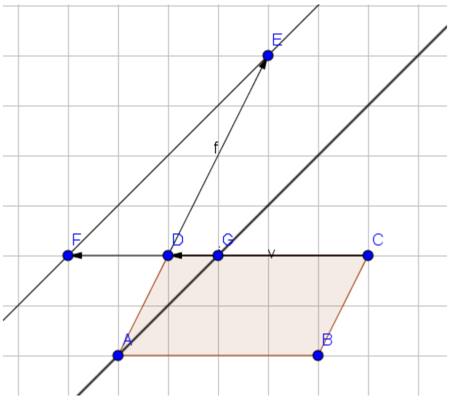
   $$\vec{BC} = (0 - 2\,;\, 4 - 1) = (-2\,;\, 3) \qquad \Rightarrow \qquad BC^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$
   Comme $AB^2 \neq BC^2$, on a $AB \neq BC$. Donc $ABCD$ n'est pas un losange.

   Démonstration 2 : un parallélogramme est un losange ssi ses diagonales sont perpendiculaires Calculons les vecteurs diagonales :
   $$\vec{AC} = (0 - (-4)\,;\, 4 - 3) = (4\,;\, 1), \qquad \vec{BD} = (-6 - 2\,;\, 6 - 1) = (-8\,;\, 5)$$
   On calcule leur produit scalaire :
   $$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 4 \times (-8) + 1 \times 5 = -32 + 5 = -27 \neq 0$$
   Donc les diagonales ne sont pas perpendiculaires, et par conséquent $ABCD$ n'est pas un losange.

Exercice 4. Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$
Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2-a \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-a \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \iff (2-a)(5-a) - 2 \times (-1) = 0$
soit $(2-a)(5-a) - 2 \times (-1) = 0 \iff 10 - 2a - 5a + a^2 + 2 = 0 \iff a^2 - 7a + 12 = 0$.
$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$: on a donc deux racines réelles :
$a_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$ et $a_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$.
Les valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en A sont 3 et 4.

Exercice 5. ABCD est un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

1. 

2. On a $3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ donc $3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ soit $-4\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$ d'où $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

3. On exprime les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{FE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

De plus :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

4. On remarque que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{FE}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires : les droites (EF) et (AG) sont donc parallèles.

5. Soit m un nombre réel et L le point défini par $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AG}$. Déterminer la valeur de m pour que les points E, L et B soient alignés.
Exprimons $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AL} \\
\overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + m\overrightarrow{AG} \\
\overrightarrow{EL} &= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + m\overrightarrow{AD} + m\overrightarrow{DG} \\
\overrightarrow{EL} &= -3\overrightarrow{AD} + m\overrightarrow{AD} + m \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \\
\overrightarrow{EL} &= -3\overrightarrow{AD} + m\overrightarrow{AD} + m \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{EL} &= \frac{m}{4}\overrightarrow{AB} + (-3+m)\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{EB} &= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Ces vecteurs sont colinéaires si leur déterminant, dans la base $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, est nul.
$det(\overrightarrow{EL}, \overrightarrow{EB}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{4} \\ -3 & -3+m \end{vmatrix} = 0 \iff -3 + m + \dfrac{3m}{4} = 0 \iff 3 = \dfrac{7m}{4} \iff$
$m = \dfrac{12}{7}$.

Exercice 6.

1. On a, dans un repère orthonormé,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v.$$

Donc
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times (-4) + 2 \times 5 = 4 + 10 = 14.$$

Ainsi,
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 14.}$$

2. On calcule d'abord $\vec{u} \cdot \vec{w}$ en fonction de x :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (-1)(x+2) + 2(x^2) = -x - 2 + 2x^2.$$

Ainsi,
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2x^2 - x - 2.$$

(a) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. On résout donc :

$$2x^2 - x - 2 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 1 + 16 = 17.$$

Donc
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$
Ainsi,
$$\boxed{x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.}$$

(b) On cherche à minimiser la fonction
$$f(x) = \vec{u} \cdot \vec{w} = 2x^2 - x - 2.$$
C'est un polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$, donc f admet un minimum au sommet, atteint pour
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$
Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ est minimal pour
$$\boxed{x = \frac{1}{4}.}$$
(Et la valeur minimale correspondante est $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{17}{8}$.)

Exercice 7. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit O le milieu du segment $[AB]$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow OM = OA \\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OA}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0
\end{aligned}$$
car $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ puisque O est le milieu de $[AB]$.

Exercice 8.
Notons I le milieu du segment $[AB]$. Notons (D) la droite passant par I et perpendiculaire à (AB).
On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
AM = BM &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \|\overrightarrow{BM}\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \\
&\Leftrightarrow M \in (D).
\end{aligned}$$

Exercice 9.

On a

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\ &= \|\overrightarrow{BA}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= b^2+c^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= b^2+c^2-2bc\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Exercice 10.

1. Un système d'équations paramétriques de la droite est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-7\lambda \\ y &=& 2+4\lambda \end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$.

   Un vecteur normal à la droite est $\vec{n}=(4,7)$ donc il existe un réel c tel que $4x+7y+c=0$ est une équation cartésienne de la droite. Puisque la droite passe par le point $A(1,2)$, on a $4\times1+7\times2+c=0$ donc $c=-18$.

   La droite admet donc pour équation cartésienne $4x+7y-18=0$.
2. Un vecteur directeur de la droite D est $\overrightarrow{AB}=(-6,1)$. De plus, la droite passe par $A(1,2)$ donc un système d'équations paramétriques de la droite D est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-6\lambda \\ y &=& 2+\lambda \end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$.

   Un vecteur normal à la droite D est $\vec{n}=(1,6)$ donc il existe un réel c tel que $x+6y+c=0$ est une équation cartésienne de la droite D. Puisque la droite passe par le point $A(1,2)$, on a $1+2\times6+c=0$ donc $c=-13$.

   La droite admet donc pour équation cartésienne $x+6y-13=0$.
3. Soit D' la droite d'équation $2x+y-4=0$. Un vecteur normal à cette droite est $\vec{u}=(2,1)$, qui est donc un vecteur directeur de D puisque D et D' sont perpendiculaires. Puisque D passe par $A(1,2)$, un système d'équations paramétriques de (D) est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2\lambda \\ y &=& 2+\lambda \end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$.

   Un vecteur normal à (D) est $\vec{n}=(-1,2)$ donc il existe un réel c tel que $-x+2y+c=0$ est une équation cartésienne de la droite D. Puisque D passe par $A(1,2)$, on a $-1+2\times2+c=0$ donc $c=-3$.

   La droite D admet donc pour équation cartésienne $-x+2y-3=0$.
4. Puisque $\vec{n}=(-7,4)$ est un vecteur normal à la droite D, celle-ci admet une équation cartésienne de la forme $-7x+4y+c=0$. Puisqu'elle passe par le point $A(1,2)$, on a $-7+4\times2+c=0$ donc $c=-1$.

   La droite D admet donc pour équation cartésienne $-7x+4y-1=0$.

   Un vecteur directeur de D est alors $\vec{u}=(4,7)$ donc D admet pour système d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+4\lambda \\ y &=& 2+7\lambda \end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 11.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}=(1,3)$ et pour vecteur normal $\vec{n}=(-3,1)$ donc il existe un réel c tel que $-3x+y+c=0$ soit une équation cartésienne de (AB). Puisqu'elle passe par le point $A(1,1)$, on a $-3+1+c=0$ donc $c=2$.
Ainsi, la droite (AB) admet pour équation cartésienne $-3x+y+2=0$.
Soit $H(x,y)$ le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} H\in(AB) && \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x+y+2 &=& 0 \\ (x-3)+3(y-1) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x+y &=& -2 \\ x+3y &=& 6 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2\leftarrow 3L_2+L_1}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{rcl} -3x+y &=& -2\\ 10y &=& 16\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{6}{5}\\ y &=& \dfrac{8}{5}\end{array}\right.$$

donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point $H(\frac{6}{5},\frac{8}{5})$.

Exercice 12.
Le point I a pour coordonnées $I(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2})=(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$.
Soit $I'(x_{I'},y_{I'})$ le symétrique de I par rapport à la droite (AC).
Soit $J(x_J,y_J)$ le milieu du segment $[II']$. Par définition, $J\in(AC)$ et les droites (IJ) et (AC) sont perpendiculaires.
La droite (AC) a pour équation cartésienne $\sqrt{3}x-y=0$. On a donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} J\in(AC)\\ \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{3}x_J-y_J &=& 0\\ \frac{1}{2}(x_J-\frac{3}{4})+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_J-\frac{\sqrt{3}}{4}) &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_J &=& \sqrt{3}x_J\\ 2x_J &=& \dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

d'où $J(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8})$.
Enfin, on a $x_J=\dfrac{x_I+x_{I'}}{2}$ et $y_J=\dfrac{y_I+y_{I'}}{2}$ d'où

$$x_{I'}=2x_J-x_I=0 \quad\text{et}\quad y_{I'}=2y_J-y_I=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 13.
• Calculons le point d'intersection de D_1 et D_2, noté $A(x,y)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ x-2y &=& -5\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ -5y &=& -10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\\ y &=& 2\end{array}\right.$$

donc $A(-1,2)$.
• Calculons le point d'intersection de D_1 et D_3, noté $B(x,y)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ 4x-3y &=& 10\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ -15y &=& -10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& \frac{2}{3}\end{array}\right.$$

donc $B(3,\frac{2}{3})$.
• Calculons le point d'intersection de D_2 et D_3, noté $C(x,y)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& -5\\ 4x-3y &=& 10\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& -5\\ 5y &=& 30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 7\\ y &=& 6\end{array}\right.$$

donc $C(7,6)$.
• Soit $H(x,y)$ le projeté orthogonal de C sur la droite $(AB)=D_1$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} H\in D_1 && \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ 4(x-7)-\frac{4}{3}(y-6) &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ 4x-\frac{4}{3}y &=& 20\end{array}\right.$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 5\\ -\frac{40}{3}y &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

donc $H(5,0)$.
• L'aire du triangle ABC vaut alors $\dfrac{AB\times CH}{2}$.
On a $AB=\sqrt{4^2+(-\frac{4}{3})^2}=\sqrt{16+\frac{16}{9}}=\sqrt{\dfrac{160}{9}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ et $CH=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
donc l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{40}{3}$.

Exercice 14.

1. • La hauteur issue de A admet comme vecteur normal $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c-b \\ 0 \end{pmatrix} = (c-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $c - b \neq 0$ puisque les points B et C sont distincts, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $x + d = 0$, où d est à déterminer.
   Or, elle passe par le point $A(0, a)$ donc $0 + d = 0$, d'où $d = 0$.
   Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $x = 0$.
   • La hauteur issue de B admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ (qui n'est pas le vecteur nul, puisque $(a, c) \neq (0, 0)$ sinon les points A et C seraient confondus) donc elle admet une équation cartésienne de la forme $cx - ay + d = 0$, où d est à déterminer.
   Or, elle passe par le point $B(b, 0)$ donc $cb + d = 0$, d'où $d = -cb$.
   Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $cx - ay - bc = 0$.
   • La hauteur issue de C admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (qui n'est pas le vecteur nul, puisque $(a, b) \neq (0, 0)$ sinon les points A et B seraient confondus) donc elle admet une équation cartésienne de la forme $bx - ay + d = 0$, où d est à déterminer.
   Or, elle passe par le point $C(c, 0)$ donc $bc + d = 0$, d'où $d = -bc$.
   Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $bx - ay - bc = 0$.
2. Cherchons le point d'intersection des trois hauteurs. Cela revient à résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ cx - ay - bc & = & 0 \\ bx - ay - bc & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ ay + bc & = & 0 \\ ay + bc & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ ay + bc & = & 0 \end{array}\right.$$
   Si $a = 0$, les trois points sont alignés donc ABC n'est pas un triangle.
   Ainsi, nécessairement $a \neq 0$ donc $y = -\dfrac{bc}{a}$.
   Le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC (appelé orthocentre du triangle) est donc le point $H(0, -\frac{bc}{a})$.

Exercice 15.

1. On a
$$x^2+y^2-2x-4y+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = 4 = 2^2$$
   donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $O(1, 2)$ et de rayon 2.
2. Soit (D) une droite passant par A et tangente à $\mathcal{C}$, c'est à dire qu'elle intersecte le cerle $\mathcal{C}$ en un seul point. Notons $H(x, y)$ ce point d'intersection. Alors H vérifie :
$$\left\{\begin{array}{ccc} H \in \mathcal{C} & & \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OH} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2+y^2-2x-4y+1 & = & 0 \\ (x+1)(x-1)+y(y-2) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2+y^2-2x-4y & = & -1 \\ x^2+y^2-2y & = & 1 \end{array}\right.$$
$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} x^2+y^2-2x-4y & = & -1 \\ 2x+2y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2+(1-x)^2-2x-4(1-x) & = & -1 \\ y & = & 1-x \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & = & 2 \\ y & = & 1-x \end{array}\right.$$
   d'où $(x, y) = (1, 0)$ ou $(x, y) = (-1, 2)$.
   Notons $H_1(1, 0)$ et $H_2(-1, 2)$. Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont les droites (AH_1) et (AH_2) d'équations respectives $y = 0$ et $x + 1 = 0$.

Exercice 16.

1. • Tout d'abord, puisque $H \in D, \|\overrightarrow{HM}\| \geqslant \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\| = d(M, D)$.

   • D'autre part, pour tout $A \in D$, puisque $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$, on a d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{HM}\|^2$$

   donc pour tout $A \in D, \|\overrightarrow{HM}\| \leqslant \|\overrightarrow{AM}\|$.
   Ainsi, $\|\overrightarrow{HM}\|$ est un minorant de l'ensemble $\{\|\overrightarrow{AM}\|, A \in D\}$ et est donc inférieur au plus grand minorant de cet ensemble, i.e. $\|\overrightarrow{HM}\| \leqslant \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\|$.
   Finalement, on a donc bien $\|\overrightarrow{HM}\| = \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\| = d(M, D)$.

2. Soit $A(x_A, y_A)$ un point de D. Soit $\vec{n} = (a, b)$ un vecteur normal à la droite D.
   On a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 - (ax_A + by_A)$. Or, $A \in D$ donc $ax_A + by_A + = -c$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + c$.
   Par ailleurs, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux puisque A et H appartiennent à D.
   Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs normaux à D, ils sont colinéaires donc $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \pm\|\overrightarrow{HM}\|\|\vec{n}\| = \pm\|\overrightarrow{HM}\|\sqrt{a^2 + b^2}$.
   Ainsi, $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |ax_0 + by_0 + c| = \|\overrightarrow{HM}\|\sqrt{a^2 + b^2}$ d'où

$$d(M, D) = \|\overrightarrow{HM}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

   car $a^2 + b^2 > 0$ puisque $(a, b) \neq (0, 0)$.

3. • **Analyse :** Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$ passant par $A(4, 2)$ et située à distance 2 de l'origine.
   On applique la question précédente avec $M = (0, 0), d(M, D) = 2$ et on obtient

$$2 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

   Puisque $A(4, 2) \in D$, on a $4a + 2b + c = 0$ donc$|c| = |4a + 2b| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$.
   En élevant cette égalité au carré, on obtient $16a^2 + 16ab + 4b^2 = 4a^2 + 4b^2$ d'où

$$2a(6a + 8b) = 0,$$

   i.e. $a = 0$ ou $6a + 8b = 0$.
   - Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$ et D admet pour équation $y = -\frac{c}{b}$. La distance de 0 à cette droite vaut alors 2 si et seulement si D a pour équation $y = 2$ ou $y = -2$. Mais A n'appartient pas à la droite d'équation $y = -2$ donc la seule équation possible dans ce cas est $y = 2$.
   - Si $a \neq 0$, alors $b = -\frac{6a}{8} = -\frac{3}{4}a$. Une équation de D est alors

$$ax - \frac{3}{4}ay - 4a - 2\left(-\frac{3}{4}a\right) = 0$$

   d'où en simplifiant par $a \neq 0, x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{2} = 0$, ou encore $4x - 3y - 10 = 0$.

• **Synthèse :**
- Soit D la droite d'équation $y=2$. Alors $A(4,2)\in D$ et $d(M,D)=2$.
- Soit D' la droite d'équation $4x-3y-10=0$.
Alors $A(4,2)\in D'$ et $d(M,D')=\dfrac{10}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$.
Les droites cherchées sont donc ces deux droites.

Exercice 17. ABC est un triangle. Le plan est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et on considère les points $R(-1;0)$ et $Q(0;a)$ où est un nombre réel différent de -1.

1.
2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}0-(-1)\\a-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.
$\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{RQ})=\begin{vmatrix}-1&1\\1&a\end{vmatrix}=-a-1\neq 0$ car $a\neq -1$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{RQ}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (BC) et (RQ) sont sécantes.
On déterminer l'équation des droites (BC) et (RQ) :
— (BC) : comme $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur on a $x-(-1)y+c=0$ soit $x+y+c=0$. Or $B\in(BC)$ donc $1+0+c=0$ soit $c=-1$ d'où $x+y-1=0$.
— (RQ) : comme $\overrightarrow{RQ}$ est un vecteur directeur on a $ax-y+c=0$ soit $ax-y+c=0$. Or $R\in(RQ)$ donc $-a+c=0$ soit $c=a$ d'où $ax-y+a=0$.
On est donc amené à résoudre le système
$$\begin{cases}x+y-1&=0\\ax-y+a&=0\end{cases}$$
En ajoutant les deux équations : $(a+1)x+(a-1)=0$ soit $(1+a)x=1-a$ d'où $x=\dfrac{1-a}{1+a}$.
De plus $y=1-x=1-\dfrac{1-a}{1+a}=\dfrac{1+a}{1+a}-\dfrac{1-a}{1+a}=\dfrac{2a}{1+a}$.
En définitive, les coordonnées de P sont bien $\left(\dfrac{1-a}{1+a};\dfrac{2a}{1+a}\right)$.
3. (a) Notons $M(x;y)$.
On a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MQ}$
soit $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\a-y\end{pmatrix}$
d'où $x=1$ et $y=a-1$.
Ainsi, $M(1;a-1)$.

Notons $N(x;y)$.
On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{NP}$ soit $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-a}{1+a}-x\\\dfrac{2a}{1+a}-y\end{pmatrix}$
d'où $x=\dfrac{1-a}{1+a}$ et
$y=\dfrac{2a}{1+a}-1=\dfrac{2a}{1+a}-\dfrac{1+a}{1+a}=\dfrac{a-1}{1+a}$.
Ainsi, $N\left(\dfrac{1-a}{1+a};\dfrac{a-1}{1+a}\right)$.

(b) $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}1-(-1)\\a-1-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}2\\a-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RN}\begin{pmatrix}\dfrac{1-a}{1+a}-(-1)\\\dfrac{a-1}{1+a}-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{RN}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{1+a}\\\dfrac{a-1}{1+a}\end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RN}) = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{2}{1+a} \\ a-1 & \dfrac{a-1}{1+a} \end{vmatrix} = 2\times\frac{a-1}{1+a} - (a-1)\times\frac{2}{1+a} = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{RN}$ sont donc colinéaires. Ainsi, les points R, M et N sont alignés.

Exercice 18. Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{a}\begin{pmatrix}-(-5)\\3\end{pmatrix} = \vec{a}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de d si, et seulement si, $\det(\vec{a},\vec{u}) = 0$ ($\vec{a}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires) soit $\begin{vmatrix}5 & m+1\\3 & m^2\end{vmatrix} = 5\times m^2 - 3\times(m+1) = 0$.
m est ainsi solution de l'équation $5m^2 - 3m - 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times5\times(-3) = 9 + 60 = 69 > 0$.
$m_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{69}}{10}$.
$m_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{6}}{10}$.
Ainsi, pour $m = \dfrac{3-\sqrt{69}}{10}$ ou pour $m = \dfrac{3+\sqrt{69}}{10}$, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $3x - 5y - 4 = 0$.

Exercice 19.
Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux deux à deux.
Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w} = \vec{0}$. Montrons que $\alpha=\beta=\gamma=0$.
On a $0 = \vec{0}\cdot\vec{u} = (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w})\cdot\vec{u} = \alpha\vec{u}\cdot\vec{u}+\beta\vec{v}\cdot\vec{u}+\gamma\vec{w}\cdot\vec{u} = \alpha\|\vec{u}\|^2$ puisque $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0$.
Puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $\|\vec{u}\|^2 > 0$ donc $\alpha\|\vec{u}\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.
En prenant le produit scalaire avec $\vec{v}$ et avec $\vec{w}$, on montre de même que $\beta=\gamma=0$.
Ainsi, $\alpha=\beta=\gamma=0$, ce qui prouve que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.

1. On calcule les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-0\\2-1\\-1-(-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

   De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\\-5-(-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$.

   Si les points A,B,C étaient alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires, donc il existerait un réel k tel que

   $$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}.$$

   En comparant la troisième coordonnée :

   $$0 = k(-4) \quad\Longrightarrow\quad k = 0.$$

   Mais alors on aurait $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, ce qui est faux puisque $\overrightarrow{AB} = (-2,1,0)\neq\vec{0}$.
   Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent

   $$\boxed{\text{les points } A,\ B,\ C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

2. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-2}{-1} \neq \dfrac{1}{1}$ donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = -2t' \\ y = 1 + t' \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2 - t = -2t' \\ 1 + t = 1 + t' \\ -1 - t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - t = -2t' \\ t = t' \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - t = -2t' \\ t = t' \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ t' = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ceci est impossible donc les droites ne sont pas sécantes.
Ainsi, les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas coplanaires.

3. Un vecteur normal du plan d'équation $4x + 8y + 9z + 1 = 0$ est $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times (-2) + 8 \times 1 + 9 \times 0 = 0$.
   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + 8 \times 3 + 9 \times (-4) = 12 + 24 - 36 = 0$.

   $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Une équation du plan (ABC) est donc du type $4x + 8y + 9z + c = 0$. Comme $A \in (ABC)$, $4 \times 0 + 8 \times 1 + 9 \times (-1) + c = 0$ donc $c = 9 - 8 = 1$.

   D'où une équation du plan (ABC) : $4x + 8y + 9z + 1 = 0$.

4. Un vecteur normal du plan d'équation $7x - y - 2z + 6 = 0$ est $\overrightarrow{n'} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 4 \times 7 + 8 \times (-1) + 9 \times (-2) = 28 - 8 - 18 = 2 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas orthogonaux.
   En conclusion, les plans (ABC) et celui d'équation cartésienne $7x - y - 2z + 6 = 0$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 21.

1. La droite passe par le point $A(0, 2)$, admet pour base (i.e. pour vecteur directeur) $\vec{u} = (1, 3)$ et donc pour représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & 2 + 3\lambda \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$.

2. La droite (AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$. On peut donc prendre comme base (ou vecteur directeur) de la droite le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite est alors $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + \lambda \\ y & = & 2 + \lambda \\ z & = & 3 + \lambda \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$.

   Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Il admet pour base $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, -1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P donc

   $$M(x, y, z) \in (AB) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} & = & 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 1 - (y - 2) & = & 0 \\ x - 1 - (z - 3) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ x - z + 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

3. On a
$$\begin{aligned}3x+2y+5z-4=0 &\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}z+2\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=(x,-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}z+2,z)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=x(1,-\frac{3}{2},0)+z(0,-\frac{5}{2},1)+(0,2,0).\end{aligned}$$
Donc si on note $A(0,2,0)\in P$, on a
$$M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=x(1,-\frac{3}{2},0)+z(0,-\frac{5}{2},1)=\frac{x}{2}(2,-3,0)+\frac{z}{2}(0,-5,2)$$
donc on peut prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=(2,-3,0)$ et $\vec{v}=(0,-5,2)$.
Une représentation paramétrique du plan P est alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} x&=&2\lambda\\ y&=&2-3\lambda-5\mu\\ z&=&2\mu\end{array}\right.,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

4. Une base du plan P est $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ où $\overrightarrow{AB}=(0,-3,-3)=-3(0,1,1)$ et $\overrightarrow{AC}=(2,0,-2)=2(1,0,-1)$. On peut donc prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=(0,1,1)$ et $\vec{v}=(1,0,-1)$.
une représentation paramétrique du plan P est alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} x&=&1+\mu\\ y&=&-1+\lambda\\ z&=&\lambda-\mu\end{array}\right.,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$
Cherchons un vecteur normal au plan P, i.e. cherchons $\vec{n}=(a,b,c)$ tel que
$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\vec{u}&=&0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} b+c&=&0\\ a-c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=c=-b.$$
Si on pose $a=1$, on trouve $\vec{n}=(1,-1,1)$.
Il existe donc un réel d tel qu'une équation cartésienne de P soit $x-y+z+d=0$. Puisque le plan P passe par $B(1,-1,0)$, on en déduit $d=-2$. Une équation cartésienne de P est alors $x-y+z-2=0$.

5. On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z+2&=&0\\ 2x+z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} y&=&-5x-2\\ z&=&-2x\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(x,-5x-2,-2x)=x(1,-5,-2)+(0,-2,0)$$
donc la droite passe par le point $A(0,-2,0)$ et admet pour base (i.e. pour vecteur directeur) $\vec{u}=(1,-5,-2)$. Une représentation paramétrique de la droite est alors $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&\lambda\\ y&=&-2-5\lambda\\ z&=&-2\lambda\end{array}\right.,\lambda\in\mathbb{R}.$

6. On a $(x,y,z)=(0,1,z)=z(0,0,1)+(0,1,0)$ donc la droite D passe par le point $A(0,1,0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}=(0,0,1)$.
Une représentation paramétrique de la droite D est alors $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ y&=&1\\ z&=&\lambda\end{array}\right.,\lambda\in\mathbb{R}.$

7. La droite D passe par le point $A(-1,0,3)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}=(2,-1,-5)$. Soit P le plan d'équation $2x-y-5z=0$. Il admet pour base $(\vec{v},\vec{w})$ où $\vec{v}=(1,2,0)$ et $\vec{w}=(0,5,-1)$. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P donc

$$M(x,y,z)\in D \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM}\cdot\vec{v} &=& 0\\ \overrightarrow{AM}\cdot\vec{w} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+1+2y &=& 0\\ 5y-(z-3) &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+1 &=& 0\\ 5y-z+3 &=& 0\end{array}\right.$$

8. Le plan P passe par le point $A(0,1,-2)$ et admet pour base $(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=(1,-1,2)$ et $\vec{v}=(1,2,0)$.
Cherchons un vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ normal au plan P. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\vec{u} &=& 0\\ \vec{n}\cdot\vec{v} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& 0\\ a+2b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \frac{3}{2}b\\ a &=& -2b\end{array}\right.$$

Si on pose $b=2$, on obtient $\vec{n}=(-4,2,3)$.
Il existe alors un réel d tel que P admet pour équation cartésienne $-4x+2y+3z+d=0$.
En utilisant les coordonnées du point $A(0,1,-2)\in P$, on trouve $d=4$.
Le plan P admet donc pour équation cartésienne $-4x+2y+3z+4=0$.

Exercice 22.
Le plan (ABC) admet pour base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ où $\overrightarrow{AB}=(0,1,4)$ et $\overrightarrow{AC}=(0,-1,1)$. Il admet pour vecteur normal $\vec{n}=(1,0,0)$ et pour équation cartésienne $x=1$.
Soit $H(1,y,z)$ le projeté orthogonal de $D(0,1,2)$ sur le plan (ABC). On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB} &=& 0\\ \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y-1+4(z-2) &=& 0\\ -(y-1)+z-2 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -4z+9\\ z &=& 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 1\\ z &=& 2\end{array}\right.$$

donc le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(1,1,2)$.

Exercice 23.

1. (a) • Le plan (OAB) admet pour base $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ où $\overrightarrow{OA}=(1,2,1)$ et $\overrightarrow{OB}=(3,2,0)$.
Soit $\vec{n}=(a,b,c)$ un vecteur normal au plan (OAB). Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} &=& 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OB} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c &=& 0\\ 3a+2b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& 2a\\ b &=& -\frac{3}{2}a\end{array}\right.$$

En posant $a=2$, on trouve $\vec{n}=(2,-3,4)$.
Puisque le plan (OAB) passe par le point $O(0,0,0)$, il admet donc pour équation cartésienne $2x-3y+4z=0$.
• Le plan (OCD) admet pour base $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$ où $\overrightarrow{OC}=(2,1,1)$ et $\overrightarrow{OD}=(1,0,4)$.
Soit $\vec{n}=(a,b,c)$ un vecteur normal au plan (OCD). Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\overrightarrow{OC} &=& 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OD} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+b+c &=& 0\\ a+4c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 7c\\ a &=& -4c\end{array}\right.$$

En posant $c=1$, on trouve $\vec{n}=(-4,7,1)$.
Puisque le plan (OCD) passe par le point $O(0,0,0)$, il admet donc pour équation cartésienne $-4x+7y+z=0$.

(b) Appelons D la droite obtenue en intersectant ces deux plans. Elle admet pour équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+4z & = & 0 \\ -4x+7y+z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2+2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+4z & = & 0 \\ y+9z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{31}{2}z \\ y & = & -9z \end{array}\right.$$

d'où $(x,y,z)=\frac{z}{2}(-31,-18,2)$ donc la droite D est la droite passant par $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=(-31,-18,2)$.

2. Dans l'espace, deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Déterminons un vecteur directeur pour chacune de ces droites.

On

$$(x,y,z)\in D_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z+1 \\ y & = & z+2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(2z+1,z+2,z)=z(2,1,1)+(1,2,0)$$

donc un vecteur directeur de D_1 est $\vec{u}=(2,1,1)$.

De même,

$$(x,y,z)\in D_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & a \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ -3y+z & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4y+2-a \\ z & = & 3y+a-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=(-4y+2-a,y,3y+a-1)=y(-4,1,3)+(2-a,0,a-1)$$

donc un vecteur directeur de D_2 est $\vec{v}=(-4,1,3)$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

Calculons l'intersection $D_1\cap D_2$. On a

$$(x,y,z)\in D_1\cap D_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \\ x+y+z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & a \end{array}\right. \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \\ y+3z & = & 0 \\ -2y+4z & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2 \\ L_4\leftarrow L_4+2L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \\ 4z & = & -2 \\ 2z & = & a+3 \end{array}\right. \underset{L_4\leftarrow 2L_4-L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x-2z & = & 1 \\ y-z & = & 2 \\ 4z & = & -2 \\ 0 & = & 2a+8 \end{array}\right.$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le système est compatible, i.e. si et seulement si $a=-4$ et dans ce cas le point d'intersection de D_1 et D_2 est $(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

Ainsi, D_1 et D_2 sont coplanaires si et seulement si $a=-4$ et dans ce cas, elles sont contenues dans le plan passant par le point $(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ et de base $(\vec{u},\vec{v})$.

3. (a) Déterminons un vecteur directeur pour chacune de ces droites. On a

$$(x,y,z)\in D_3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ x+3y-5z & = & -2 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ y-4z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7z+4 \\ y & = & 4z-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=(-7z+4,4z-2,z)=z(-7,4,1)+(4,-2,0)$$

donc un vecteur directeur de D_3 est $\vec{u}=(-7,4,1)$.

De même,

$$(x,y,z) \in D_4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y+2z & = & 3 \\ y-4z & = & -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -7z+9 \\ y & = & 4z-5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (-7z+9, 4z-5, z) = z(-7,4,1) + (9,-5,0)$$

donc un vecteur directeur de D_4 est $\vec{u} = (-7,4,1)$.

Les droites D_3 et D_4 ayant même vecteur directeur, elles sont parallèles (et non confondues car $(9,-5,0) \notin D_3$).

(b) Soit $A(4,-2,0) \in D_1$ et $B(9,-5,0) \in D_2$.

Le plan P qui contient D_3 et D_4 est alors le plan passant par le point A et de base $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ où $\overrightarrow{AB} = (5,-3,0)$ (qui est bien non colinéaire à $\vec{u}$).

Cherchons un vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ normal au plan P, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{n} \cdot \vec{u} & = & 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -7a+4b+c & = & 0 \\ 5a-3b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & \frac{a}{3} \\ b & = & \frac{5}{3}a \end{array} \right.$$

En posant $a = 3$, on obtient $\vec{n} = (3,5,1)$.

Il existe alors un réel d tel que P admette pour équation cartésienne $3x+5y+z+d = 0$.

En utilisant les coordonnées du point A, on trouve $d = -2$ donc P admet pour équation cartésienne $3x+5y+z-2 = 0$.

Exercice 24. On prend BCD pour base. Le volume du tétraèdre vaut

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A}(BCD)\,h$$

où h est la distance du point A au plan (BCD).

1) Aire de la base BCD

$$\overrightarrow{BC} = (1,0,2), \qquad \overrightarrow{CD} = (6,5,-3).$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Donc le triangle BCD est rectangle en C, d'où

$$\mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2}\,BC \cdot CD.$$

Or

$$BC = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}, \qquad CD = \sqrt{6^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{70}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,\sqrt{70} = \frac{1}{2}\sqrt{350} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.}$$

2) Hauteur $h = d\big(A,(BCD)\big)$ On cherche une équation du plan (BCD).

Un vecteur normal $\vec{n} = (a,b,c)$ au plan (BCD) est orthogonal à $\overrightarrow{BC} = (1,0,2)$ et $\overrightarrow{BD} = (7,5,-1)$, donc

$$(a,b,c) \cdot (1,0,2) = 0 \Rightarrow a + 2c = 0,$$

$$(a,b,c) \cdot (7,5,-1) = 0 \Rightarrow 7a + 5b - c = 0.$$

Avec $a=-2c$, on obtient $-14c+5b-c=0 \Rightarrow b=3c$. En prenant $c=1$:

$$\vec{n}=(-2,3,1).$$

Le plan passant par $B(-1,1,0)$ a pour équation

$$-2(x+1)+3(y-1)+z=0 \iff -2x+3y+z-5=0.$$

Calculons les coordonnées du projeté orthogonal $H(x,y,z)$ du point A sur le plan (BCD).
On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} H\in(BCD) & & \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} & = & 0 \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} -2x+3y+z-5 & = & 0 \\ (x-5)+2(z-2) & = & 0 \\ 7(x-5)+5(y+5)-(z-2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} -2x+3y+z-5 & = & 0 \\ x+2z-9 & = & 0 \\ 7x+5y-z-8 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ -2x+3y+z-5 & = & 0 \\ 7x+5y-z-8 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-7L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2+2L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ 3y+5z-23 & = & 0 \\ 5y-15z+55 & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3\leftarrow\frac{1}{5}L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ 3y+5z-23 & = & 0 \\ y-3z+11 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3\leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ y-3z+11 & = & 0 \\ 3y+5z-23 & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ y-3z+11 & = & 0 \\ 14z-56 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x+2z-9 & = & 0 \\ y-3z+11 & = & 0 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{array}\right.$$

Donc $H(1,1,4)$ et $h=AH=\sqrt{(1-5)^2+(1+5)^2+(4-2)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

3) Volume

$$V=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}(BCD)\times h=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{14}}{2}\times 2\sqrt{14}=\frac{1}{3}\times 5\times 14=\frac{70}{3}.$$

$$\boxed{V=\frac{70}{3}}$$