Corrigé de la liste d'exercices n°16 — Suites réelles

Exercice 1

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 2

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, -\frac{n}{3} < \lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor \leqslant 1 - \frac{n}{3}$ donc $-\frac{1}{3} < \frac{\lfloor 1-\frac{n}{3}\rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, on déduit du théorème des gendarmes que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor}{n} = -\frac{1}{3}.$$
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, -2 + (-1)^n \leqslant -1$ donc $(-2 + (-1)^n)n \leqslant -n$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2+(-1)^n)n = -\infty$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = -2n^2 + n(1+\sin(n)) = n^2\left(-2 + \frac{1+\sin(n)}{n}\right).$$
La suite $(1+\sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\sin(n)}{n} = 0$.
On en déduit par somme de limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \frac{1+\sin(n)}{n} = -2$ donc par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \frac{1+\sin(n)}{n}\right) = -\infty.$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (3n-1)^7 - (2n-1)^6 = n^7\left(3 - \frac{1}{n}\right)^7 - n^6\left(2 - \frac{1}{n}\right)^6 = n^7\left[\left(3-\frac{1}{n}\right)^7 - \frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^6\right].$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3-\frac{1}{n}\right)^7 - \frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^6 = 3^7$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{n^5(1+\frac{1}{n^2})}{n^5(\frac{\sin(n)}{n^3}-1)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^3}-1}.$$
Puisque $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} - 1 = -1.$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.
7. En multipliant par n^3 le numérateur et le dénominateur, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{n-2n^2}{n+(-1)^n} = \frac{n^2(\frac{1}{n}-2)}{n(1+\frac{(-1)^n}{n})} = n\frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}}.$$
Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1.$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = -2$ donc par quotient
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = -\infty.$$

Exercice 3

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n(n+1)} - n &= \frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)(\sqrt{n(n+1)}+n)}{\sqrt{n(n+1)}+n} \\ &= \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. \end{aligned}$$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{3^n((\frac{2}{3})^n-1)}{3^n((\frac{2}{3})^n+1)} = \frac{(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{2}{3})^n+1}.$$
Puisque $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \left(\frac{3^n((\frac{2}{3})^n + 1)}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3\left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right)}.$$

Puisque $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right)} = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_n = \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n-1} k + n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n-1)n + n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2}{n^2+n} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$ donc par composition de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 4

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1 - n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. Puisque $\frac{3}{4} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Par ailleurs, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n) = 0$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n(1 + \frac{\sin(n)}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1 + \frac{\sin(n)}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})}.$$

Puisque $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$. Finalement, par quotient, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n)}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})} = 0.$$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n}.$$
Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

On a déjà vu par ailleurs que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = n\left(1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right).$$
On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 1$ donc par produit, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\left((-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right) = +\infty.$$
6. Puisque pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|u_n| = \left|\frac{1}{2}\sin(n!)\right|^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 5

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient
$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{n^2+3-(n^2+1)}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{2}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ donc par composition de limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$.
3. Puisque $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.
4. Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = e$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $n + k \leqslant 2n$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$
Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc par comparaison, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!], n + 1 \leqslant n + k \leqslant 2n$ donc
$$\frac{1}{4n^2} \leqslant \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$
En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2}$$
d'où
$$\frac{1}{4n} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{(n+1)^2}.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{(n+1)^2} = \dfrac{n}{n^2+2n+1} = \dfrac{1}{n+2+\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. De même, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n^2 x - 1 < \lfloor n^2 x \rfloor \leqslant n^2 x$ donc $nx - \frac{1}{n} < \dfrac{\lfloor n^2 x \rfloor}{n} \leqslant nx$.
• Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.
• Si $x > 0$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nx - \frac{1}{n} = +\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n^2 x \rfloor}{n} = +\infty$.
• Si $x < 0$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nx = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n^2 x \rfloor}{n} = -\infty$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!], kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$ donc $\dfrac{kx-1}{n^2} < \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leqslant \dfrac{kx}{n^2}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, on trouve
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2}$$
d'où
$$\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} < v_n \leqslant \frac{n(n+1)x}{2n^2}.$$
Or, $\dfrac{n(n+1)x}{2n^2} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})x}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{2}$. De même, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 8

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant k^n|u_0|$.
• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $k^0|u_0| = |u_0| \geqslant |u_0|$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n| \leqslant k^n|u_0|$. Montrons que $|u_{n+1}| \leqslant k^{n+1}|u_0|$.
Par propriété de la suite, on a $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence (et puisque $k > 0$), on en déduit que

$$|u_{n+1}| \leqslant k \times k^n|u_0| = k^{n+1}|u_0|,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n| \leqslant k^n|u_0|$.
Or, puisque $k \in]0, 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0| = 0$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 9

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n \leqslant 1$ donc en multipliant par u_n (qui est positif), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_nv_n \leqslant u_n \leqslant 1$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 1$, par hypothèse, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
En échangeant u_n et v_n (qui jouent des rôles symétriques), on trouve de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 10

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$.
   Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $\dfrac{u_n}{2} > 0$ et $\dfrac{1}{u_n}$ d'où $\dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} > 0$, ce qui assure que $u_{n+1} > 0$ et achève la récurrence.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

   car pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Ceci prouve que pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{2}$. Or, on a également $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$ donc on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

   Or, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geqslant 2$ d'où $2 - u_n^2 \leqslant 0$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, 2u_n > 0$, on en déduit que $\dfrac{2 - u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente de limite $l \geqslant \sqrt{2}$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, on a également $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$, et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+2}{2u_n}$, on obtient
$$l = \frac{l^2+2}{2l}$$
d'où $l^2 = 2$, i.e. $l = \pm\sqrt{2}$. Puisque $l \geqslant \sqrt{2}$, on en déduit que $l = \sqrt{2}$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice 11

1. $\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2. \end{cases}$

   Expression de u_n. Point fixe l vérifiant $= \frac{1}{2}l + 2$, donc $= 4$. On pose $v_n = u_n - l$: alors $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, $v_0 = u_0 - l = 3 - 4 = -1$. Ainsi $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et
   $$\boxed{u_n = 4 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}.$$
   Limite. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, on a $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 4}$.

   Somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(4 - 2^{-k}\right) = 4(n+1) - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 4(n+1) - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 4n + 2 + 2^{-n}.$$
   Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = 4n + 2 + 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}$.

2. $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 2, \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$

   Expression de u_n. Équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ d'où $(r-1)(r-3) = 0$, racines 1 et 3. Donc $u_n = A + B\,3^n$. Avec $u_0 = 5$ et $u_1 = 2$:
   $$\begin{cases} A + B = 5, \\ A + 3B = 2 \end{cases} \quad\Rightarrow\ B = -\tfrac{3}{2}, \quad A = \tfrac{13}{2}.$$
   Ainsi
   $$\boxed{u_n = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}3^n = \frac{13 - 3^{n+1}}{2}}.$$
   Limite. Le terme $-\frac{3}{2}\,3^n$ domine : $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty}$.

   Somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2}3^k\right) = \frac{13}{2}(n+1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{13}{2}(n+1) - \frac{3^{n+2}}{4} + \frac{3}{4}.$$
   Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{13}{2}(n+1) - \frac{3^{n+2}}{4} + \frac{3}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty}$.

3. $\begin{cases} u_0 = 4, \\ u_{n+1} = u_n - 3. \end{cases}$
   Expression de u_n. Suite arithmétique de raison -3 :
   $$\boxed{u_n = 4 - 3n}.$$
   Limite. $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty}$.
   Somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(4-3k) = 4(n+1) - 3\sum_{k=0}^{n} k = 4(n+1) - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\Big(4 - \frac{3}{2}n\Big).$$
   Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\big(4 - \frac{3}{2}n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty}$.

Exercice 12

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leqslant 5 = v_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \leqslant v_n$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.
   On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(v_n - u_n) \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(v_n - u_n) \geqslant 0$ d'après la question précédente donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3}(u_n - v_n) \leqslant 0$ d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   • Enfin, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$ donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = \dfrac{v_0 - u_0}{3^n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
   On a donc bien montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. D'après le théorème sur les suites adjacentes, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite l.
   En particulier, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 2l$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$ donc la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $u_0 + v_0 = 6$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 6 = 2l$ d'où $l = 3$.
   Finalement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Exercice 13

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$L_{2(n+1)} - L_{2n} = L_{2n+2} - L_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$$

donc la suite $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2(n+1)+1} - L_{2n+1} = L_{2n+3} - L_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$$

donc la suite $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2n+1} - L_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, ceci implique que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite l.
On en conclut que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l. (On peut en fait montrer que $l = -\ln(2)$.)

Exercice 14

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
•**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geqslant 0$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.

3. • Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}).$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $\sqrt{u_n} > 0$. D'autre part, on sait que pour tout $n \geqslant 1, 0 < u_n \leqslant v_n$ donc par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1, \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{v_n}$, i.e. $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.
Il en découle que pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
• Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

4. • On a pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.
Puisque la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, alors pour tout $n \geqslant 1, v_n \leqslant v_1$ donc pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par v_1. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

• De même, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante donc pour tout $n \geqslant 1, u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par u_1. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.

• En passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on trouve $l' = \dfrac{l + l'}{2}$ d'où $l = l'$.
Finalement, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$.

5. On a déjà vu que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Enfin, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = l - l = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc bien adjacentes.
Remarque : on pouvait montrer dès la question 3 que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes car pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$
ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ en utilisant le résultat de l'exercice 8.

Exercice 15

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
• **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
Alors $\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} > 0$ donc $\dfrac{2}{u_{n+1}} > 0$, ce qui implique que $u_{n+1} > 0$.
De même, $\dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $v_{n+1} > 0$.
Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n + v_n}{u_n v_n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$
Or, $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$ et d'après la question précédente, $u_n + v_n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.
Puisque $u_0 = 1 \leqslant 2 = v_0$, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0, u_n + v_n > 0$ et $v_n - u_n \geqslant 0$ d'après la question précédente donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui implique que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$
d'après la question précédente, donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

4. Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$ et d'après la question 2), $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   De même, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$ et d'après la question 2), $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$.
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.
   En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on trouve
$$l' = \frac{l + l'}{2} \Leftrightarrow 2l' = l + l' \Leftrightarrow l = l'.$$
   On en déduit que $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes et de même limite.}}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n.$$
   On en déduit que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0 = 2$.
   Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   On a alors par unicité de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = l^2 = 2$ d'où $l = \sqrt{2}$ ou $l = -\sqrt{2}$.
   Or, on a prouvé en question 1) que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\sqrt{2} < 0$, il existerait un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n < 0$, ce qui est absurde.
   Nécessairement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}.}$

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.
• On sait que la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à chercher parmi les points fixes de f.
Or, on a $f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{2l+3}{l+2} = l \Leftrightarrow 2l + 3 = l^2 + 2l \Leftrightarrow l^2 = 3 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{3}$.
• On a pour tout $x \neq -2, f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ (on s'intéresse à cet intervalle-là car $u_0 = 1$).
Ainsi, f est croissante sur $[1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) = [\frac{5}{3}, +\infty[\subset [1, +\infty[$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$.
On a $u_1 = f(u_0) = \dfrac{5}{3} \geqslant 1 = u_0$ et puisque f est croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, \sqrt{3}]$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leqslant \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [1, \sqrt{3}]$. Montrons que $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$.
Puisque $1 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$, par croissance de f sur $[1, \sqrt{3}]$, on en déduit que
$$1 \leqslant f(1) = \frac{5}{3} \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$
donc $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, \sqrt{3}]$.
• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in [1, \sqrt{3}]$.
Puisque les limites éventuelles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 17

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{2x + 35}.$$

• La fonction f est croissante sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$.
Cherchons les points fixes de f.
On a $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2l + 35} = l \Rightarrow 2l + 35 = l^2 \Rightarrow l^2 - 2l - 35 = 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont 7 et -5. Parmi ces deux racines, seule 7 est réellement un point fixe de f.
• Etudions le signe de $f(x) - x$.
- Si $x \in [-\frac{35}{2}, 0[$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $-x \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$.
- Si $x \geqslant 0$, on a (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) les équivalences

$$f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 35} \leqslant x \Leftrightarrow 2x + 35 \leqslant x^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 7.$$

Finalement, $f(x) - x \geqslant 0$ pour $x \in [-\frac{35}{2}, 7]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ pour $x \in [7, +\infty[$.
• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2u_n + 35 \geqslant 0 \Leftrightarrow u_n \geqslant -\dfrac{35}{2}$.
Pour cela, il suffit que $u_0 \geqslant -\dfrac{35}{2}$ car f est à valeurs positives donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n \geqslant 0 > -\frac{35}{2}.$$

• Si $u_0 \geqslant 7$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$ et puisque f est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, on déduit du théorème de la limite monotone que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f.
• Si $-\frac{35}{2} \leqslant u_0 \leqslant 7$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$ et puisque f est est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 \leqslant 7$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 7$. Par croissance de f, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(7) = 7$ donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 7.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f.

Exercice 18

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $]-\infty, 12]$ par

$$f(x) = \sqrt{12 - x}.$$

• La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 12]$. De plus, on a $f(0) = \sqrt{12} < 12$ et $f(12) = 0$ donc $f([0, 12]) = [0, \sqrt{12}] \subset [0, 12]$.

Cherchons les points fixes de f. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{12-x} = x \Rightarrow 12 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0.$$

Les racines de ce trinôme sont 3 et -4, mais seul 3 est un point fixe de f.
• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\infty, 12]$. Or, f est à valeurs positives donc pour tout $n \geqslant 1$, on aura $u_n \in [0, 12]$.
Il faut donc que $u_0 \in [-132, 12]$ car $f([-132, 12]) = [0, 12]$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - 3 = \sqrt{12 - u_n} - 3 = \frac{(\sqrt{12-u_n} - 3)(\sqrt{12-u_n} + 3)}{\sqrt{12-u_n} + 3} = \frac{12 - u_n - 9}{\sqrt{12-u_n} + 3} = \frac{3 - u_n}{3}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 3| \leqslant \dfrac{|u_n - 3|}{3}$ et on montre alors aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leqslant \dfrac{|u_0 - 3|}{3^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 3 = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 19

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = x + \frac{1+x}{1+2x}.$$

• On a pour tout $l \neq -\dfrac{1}{2}, f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{1+l}{1+2l} = 0 \Leftrightarrow l = -1$ donc -1 est le seul point fixe de f.
• On a pour tout $x \neq -\frac{1}{2}, f(x) - x = \dfrac{1+x}{1+2x}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1, -\frac{1}{2}[$.
• Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{1 + 2x - 2(1+x)}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2 - 1}{(1+2x)^2} = \frac{4x + 4x^2}{(1+2x)^2} = \frac{4x(x+1)}{(1+2x)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	||	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :
• Si $u_0 \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$: on remarque que $f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = [1 + \infty[\subset]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie, à valeurs dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et puisque pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, f(x) \geqslant x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0 > -\frac{1}{2}$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle convergerait vers une limite l telle que $l \geqslant u_0 > -\frac{1}{2}$. Or, la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

-1. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et puisqu'elle est croissante, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Si $u_0 \in]-\infty, -1]$: on remarque que $f(]-\infty,-1]) =]-\infty,-1]$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est à valeurs dans $]-\infty,-1]$, donc elle est majorée par -1.
Puisque pour tout $x \in]-\infty,-1], f(x) \geqslant x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ (qui est le seul point fixe de f).
• Si $u_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[$, on a $u_1 = f(u_0) \in]-\infty,-1[$ et on est donc ramenés au cas précédent.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } u_0 < -\frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } u_0 > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Exercice 20

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
• Déterminons les points fixes de f. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{a}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Puisque $a > 0, -\sqrt{a} < 0 < \sqrt{a}$ donc f admet deux points fixes distincts.
• On a pour tout $x \neq 0, f(x) - x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} - x\right) = \dfrac{a - x^2}{2x}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup]0, \sqrt{a}]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup [\sqrt{a}, +\infty[$.
• On a pour tout $x \neq 0, f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$ donc $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup]0, \sqrt{a}]$.
On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{a}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :
• Si $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$, puisque $f([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{a}$.
D'autre part, pour tout $x \in [\sqrt{a}, +\infty[, f(x) \leqslant x$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $-\sqrt{a}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.
• Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}]$, on a $u_1 = f(u_0) \in [\sqrt{a}, +\infty[$ et on est ramenés au cas précédent.
• Si $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{a}]$, puisque $f(]-\infty, -\sqrt{a}]) =]-\infty, -\sqrt{a}]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $-\sqrt{a}$.
D'autre part, pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{a}], f(x) \geqslant x$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $\sqrt{a}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\sqrt{a}$.

• Si $u_0 \in [-\sqrt{a}, 0[$, alors $u_1 = f(u_0) \in]-\infty, -\sqrt{a}]$ et on est ramenés au cas précédent.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{si } u_0 > 0 \\ -\sqrt{a} & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$

Exercice 21

Données : f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et (u_n) est définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. **Étude des variations de f et stabilité de $[1,3]$.**
   On a pour tout $x > 0$:
   $$f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0.$$
   Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Calculons $f(1)$ et $f(3)$:
   $$f(1) = 1 + \frac{2}{1} = 3, \qquad f(3) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$
   Comme f est décroissante, pour tout $x \in [1,3]$:
   $$f(1) = 3 \geq f(x) \geq f(3) = \frac{5}{3}.$$
   Donc $f(x) \in \left[\frac{5}{3}, 3\right] \subset [1,3]$. Ainsi, $\boxed{[1,3] \text{ est stable par } f.}$

2. **Définition et bornes de la suite (u_n).**
   On a $u_0 = 1 \in [1,3]$. Si $u_n \in [1,3]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,3]$ d'après la stabilité.
   Par récurrence, on a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1,3].$$
   Ainsi la suite est bien définie et reste dans $[1,3]$.

3. **Montrons que (u_{2n}) est croissante.**
   On remarque que :
   $$u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)).$$
   Posons $g(x) = f(f(x))$.
   Comme f est décroissante, la composée de deux fonctions décroissantes est croissante :
   $$g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$
   On a $u_2 = f(u_1) = f(3) = \dfrac{5}{3} > 1 = u_0$.
   Comme g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_{2n} \in [1,3]$, et que pour tout n
   $$u_{2n+2} = g(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n} = g(u_{2n-2}).$$
   une récurrence immédiate permet de justifier que pour tout n
   $$u_{2n+2} \geq u_{2n}.$$
   Donc $\boxed{(u_{2n}) \text{ est croissante.}}$

4. **Montrons que (u_{2n+1}) est décroissante et déduisons sa limite.**
On a aussi $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f(u_{2n+2})$.
Comme f est décroissante et que (u_{2n}) est croissante :

$$u_{2n+2} \geq u_{2n} \quad \Rightarrow \quad f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}),$$

c'est-à-dire :

$$u_{2n+3} \leq u_{2n+1}.$$

Donc $\boxed{(u_{2n+1}) \text{ est décroissante.}}$
Comme (u_{2n}) est croissante et bornée dans $[1,3]$, elle converge vers une limite ℓ_1. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et bornée, elle converge vers une limite ℓ_2.
Or, d'après la relation de récurrence :

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+2} = f(u_{2n+1}).$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\ell_2 = f(\ell_1) \quad \text{et} \quad \ell_1 = f(\ell_2).$$

Donc :

$$\ell_1 = f(f(\ell_1)) \quad \text{ou encore} \quad g(\ell_1) = \ell_1.$$

Les points fixes de f vérifient $f(x) = x$, soit :

$$1 + \frac{2}{x} = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, seul $x = 2$ convient.
Ainsi, on a $\ell_1 = \ell_2 = 2$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 2.}$$

5. **Convergence de (u_n).**
Comme les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite 2, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 2.}$$

Exercice 22

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Or, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
Par composition de limites, on trouve finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

2. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n^2-1} - n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2n}.$$

Finalement, par produit, on obtient

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)(\sqrt{n^2-1}-n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(\sqrt{n^2-1}-n) = 0$.

3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, on a $\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
   D'autre part, on a $\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1 = \sqrt{1+\cos(\frac{1}{n})-1} - 1$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0$ donc $\sqrt{1+\cos(\frac{1}{n})-1} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos(\frac{1}{n})-1}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^2}$.
   Par quotient, on en déduit que $\dfrac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1}{\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{4}$.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = -n^{\frac{10}{3}}(-n^{-\frac{5}{6}} + 1 - n^{-\frac{16}{3}}).$$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^{-\frac{5}{6}}+1-n^{-\frac{16}{3}} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -n^{\frac{10}{3}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 23

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) \sim \sqrt{n}\frac{2}{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = 0$, d'où par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. En particulier, $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{n^3-1+n^2}{n^2+1} = \frac{n^3(1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = n \times \frac{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$, on en déduit que $\frac{n^3-1+n^2}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n$.
   D'autre part, $\ln(1+n^4) = \ln(n^4(1+\frac{1}{n^4})) = \ln(n^4)+\ln(1+\frac{1}{n^4}) = 4\ln(n)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n^4})}{4\ln(n)}\right)$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^4}) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\ln(n) = +\infty$ donc par somme et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n^4})}{4\ln(n)} = 1$, d'où $\ln(1+n^4) \underset{+\infty}{\sim} 4\ln(n)$.
   Par produit, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 4n\ln(n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}-1\right)$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0$, on en déduit que $\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$.

Or, $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$ donc $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
Ainsi, $\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

5. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n!}\right) = 1$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) = \ln(1 + \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n!}\right) - 1 = 0$.

   On en déduit que $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n!^2}$.
   Il en découle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n!}\right)^2 = -\frac{1}{2(n-1)!^2}$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2(n-1)!^2} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}.$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} = 2$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 24

On considère la fonction $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{2-x}.$$

1. **Étude de f et points fixes.**
   (a) f est continue sur $]-\infty, 2]$ comme composition de fonctions continues. Sur $]-\infty, 2[$, la fonction $x \mapsto 2 - x$ est dérivable, et la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; pour tout $x < 2$, on a $2 - x > 0$, donc f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} < 0.$$

   Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$.
   (b) Résolvons $f(x) = x$:

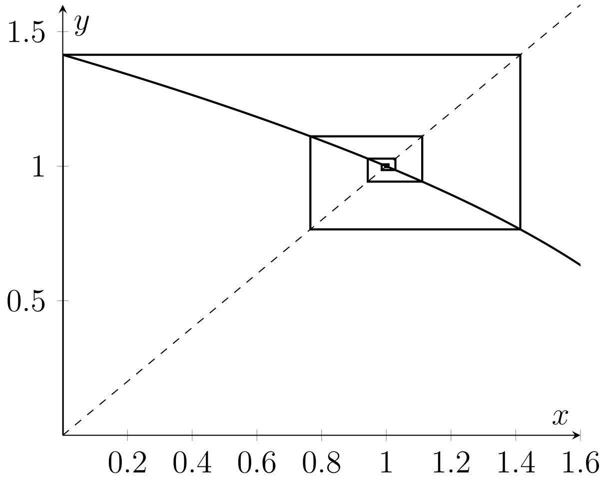
$$\sqrt{2-x} = x \iff \begin{cases} 2 - x = x^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

   Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où les racines -2 et 1. La seule racine compatible avec $x \geq 0$ est 1.

$$\boxed{\text{L'unique point fixe de } f \text{ est } 1.}$$

2. **Suite définie par itération.** On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) À l'aide de la représentation graphique (méthode de l'escargot), on conjecture que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.



(b) Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « u_n est défini et $u_n \in [0, 2]$ ».
Initialisation. $u_0 = 0 \in [0, 2]$.
Hérédité. Supposons $u_n \in [0, 2]$. Alors $u_n \leq 2$, donc u_n est dans le domaine de f, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. Comme f est décroissante sur $]-\infty, 2]$, on a

$$f(0) \geq f(u_n) \geq f(2) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} \geq u_{n+1} \geq 0.$$

Or $\sqrt{2} \leq 2$, donc $u_{n+1} \in [0, 2]$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0, 2]$.

3. **Étude de $h = f \circ f$.** Pour $x \in [0, 2]$, on a $f([0, 2]) = [f(2), f(0)] = [0, \sqrt{2}] \subset]-\infty, 2]$, donc $h(x) = f(f(x))$ est bien définie sur $[0, 2]$. Comme f est décroissante, h est croissante sur $[0, 2]$ (composition de deux fonctions décroissantes). On peut aussi écrire

$$h(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}\,.$$

4. **Sous-suites paires et impaires.**

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h(u_{2n}) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}, \qquad h(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

Donc

$$u_{2(n+1)} = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1}).$$

(b) Monotonie. On calcule

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = \sqrt{2}, \qquad u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

En particulier $u_0 \leq u_2$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Si $u_{2n} \leq u_{2n+2}$, alors, comme h est croissante sur $[0, 2]$ et que $u_k \in [0, 2]$,

$$h(u_{2n}) \leq h(u_{2n+2}) \quad \Longrightarrow \quad u_{2n+2} \leq u_{2n+4}.$$

Donc (u_{2n}) est croissante.
Ensuite, si $u_{2n} \leq u_{2n+2}$, en composant par f (décroissante sur $[0, 2]$), on obtient

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3},$$

donc (u_{2n+1}) est décroissante.
Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées (entre 0 et 2), donc elles convergent.

(c) Points fixes de h. On résout $h(x) = x$:

$$\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x \iff \begin{cases} 2-\sqrt{2-x} = x^2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

puis

$$2 - x^2 = \sqrt{2-x} \iff \begin{cases} (2-x^2)^2 = 2-x, \\ x \geq 0, \\ 2-x^2 \geq 0. \end{cases}$$

En développant :

$$(2-x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4 = 2 - x \iff x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{h(x) = x \iff \big(x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 2 - x^2 \geq 0\big).}$$

(d) On vérifie que 1 et -2 sont racines de $x^4 - 4x^2 + x + 2$, donc ce polynôme se factorise sous la forme

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x+2)(x^2 - x - 1).$$

Les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or

$$2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0,$$

donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ne vérifie pas $2 - x^2 \geq 0$. Le seul point fixe admissible de h est donc

$$\boxed{1.}$$

(e) Soient $\ell_1 = \lim u_{2n}$ et $\ell_2 = \lim u_{2n+1}$. La fonction h est continue sur $[0, 2]$ et $\ell_1, \ell_2 \in [0, 2]$. En passant à la limite dans $u_{2n+2} = h(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$, on obtient

$$\ell_1 = h(\ell_1), \qquad \ell_2 = h(\ell_2).$$

Comme h a un unique point fixe sur $[0, 2]$, on a $\ell_1 = \ell_2 = 1$. Donc

$$\boxed{u_n \longrightarrow 1.}$$

5. **Comportement selon u_0.** D'après la représentation graphique, la suite (u_n) est bien définie si et seulement si $u_0 \in [-2, 2]$. Dans ce cas, elle converge toujours vers 1.