Devoir maison n°9
A rendre pour le mercredi 4 février 2026

Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n.$$

5. Montrer que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
6. En utilisant la monotonie de la suite (W_n), prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

   En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.
7. Déduire des questions précédentes que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

   En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,W_n.$$

8. Montrer que, pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$