Lycée Fénelon
Année 2025-2026

BCPST1
A. Wassfi

Devoir surveillé de mathématiques n°4
Samedi 17 janvier 2025 (3h)

L'énoncé est constitué de cinq exercices, un problème et comporte 7 pages. **La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.**
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : étude d'une série statistique à deux variables

Une entreprise utilise de l'acier comme matière première. Afin d'optimiser ses coûts et d'optimiser l'influence de trop fortes variations des cours de l'acier, elle décide de passer des commandes à ses fournisseurs à long terme. Le tableau suivant récapitule les consommations y_i, exprimées en milliers de tonnes, pour 10 années (x_i est compris entre 1 et 10).

Année i	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Consommation y_i	0,9	1,03	1,20	1,39	1,61	1,87	2,21	2,40	2,73	3,37

1. Représenter, sur le graphique situé en **annexe** page 7 (qui est à rendre avec la copie), le nuage de points associés à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.
2. On donne $\sum y_i = 0,9 + 1,03 + \cdots + 3,37 = 18,7$.
   Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.
3. On admet que le coefficient de corrélation linéaire de cette série est $r \approx 0,98$ (à 10^{-2} près).
   Interpréter ce résultat.
4. On donne l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés :
   $$y = 0,26x + 0,44.$$
   Représenter cette droite sur le graphique situé en **annexe** page 7.
5. En utilisant cet ajustement affine, quelle consommation, exprimée en milliers de tonnes, peut-on prévoir en 2028 ?

Exercice 2 : une suite récurrente d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\frac{5}{4} - \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne cherchera pas à le calculer).
2. On admet que $u_0 = \dfrac{4\pi}{3}$. Démontrer que $u_1 = \dfrac{2\pi}{3}$. *On pourra utiliser* $\cos x = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} - \cos x\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de $\cos((n+2)x) + \cos(nx)$ en un produit de cosinus.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
   $$u_{n+2} + u_n = \frac{5}{2}u_{n+1}$$
   (d) Démontrer enfin que
   $$u_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Calculer S_n en fonction de n.
   (b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3 : un calcul d'intégrales

On considère les intégrales

$$I = \int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_1^{16} \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $t \in [1;16]$:

$$\frac{2t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}.$$

2. A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{t}$, montrer que $I = 6 + 2\ln\frac{2}{5}$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale J.

Exercice 4 : une puissance de matrices

On définit les matrices réelles suivantes de taille 3×3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que, par convention,

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

1. (a) Calculer J^2 et exprimer le résultat en fonction J.
   (b) Déterminer le rang de la matrice J.
2. (a) Calculer M^2.
   (b) Exprimer M et M^2 en fonction de I_3 et de J.
   (c) Déterminer une expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
   (d) En déduire que M est inversible et expliciter les coefficients de la matrice M^{-1}.
3. Dans cette question, on cherche à calculer M^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Prouver, par récurrence sur n, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple de réels (a_n, b_n) tels que

   $$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

   En déduire les relations définissant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (b) À partir de ces relations, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$b_{n+2} - b_{n+1} - 20\, b_n = 0.$$

   (c) En déduire la valeur de b_n puis celle de a_n en fonction de n.
4. Retrouver l'expression de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la formule du binôme de Newton, après avoir justifié qu'elle est applicable dans ce cas.

Exercice 5 : encore des matrices

Les matrices introduites dans le préambule sont utilisées dans les parties 2 et 3.

1 Préambule

On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que :

$$P^{-1}AP = T.$$

2 Système différentiel

Soients $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$, $z : t \mapsto z(t)$ trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, qui représentent les coordonnées d'un point mobile au cours du temps.
Ces fonctions satisfont le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = -3x(t) - \frac{1}{2}y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ z'(t) = -y(t) - z(t) \end{cases} \qquad , \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (S) s'écrit naturellement :

$$X' = AX,$$

où A est la matrice donnée en préambule.

3. Soit

$$Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad X = PY.$$

   Montrer que le système différentiel (S) s'écrit :

$$Y' = TY.$$

4. En déduire que :

$$\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2v(t) \\ w'(t) = -3w(t) \end{cases} \qquad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. Résoudre ce système différentiel en commençant par le bas et en remontant.
6. En déduire les solutions du système différentiel (S).

3 Suite récurrente

On considère les trois suites réelles définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n - \frac{1}{2}y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ z_{n+1} = -y_n - z_n \\ x_0 = 10,\ y_0 = -20,\ z_0 = 40 \end{cases} \qquad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Le problème se traduit sous forme matricielle par la relation :

$$X_{n+1} = AX_n,$$

où A est la matrice donnée en préambule.

7. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$
8. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}.$$
9. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$
10. En déduire l'expression de X_n.

Problème

Si l'on considère qu'un organisme est une population de cellules, le développement doit tenir compte de l'interaction mutuelle des cellules - ce que les spécialistes nomment les *relations d'allométrie.* Nous envisageons ci-dessous deux modèles d'évolution du poids P de cet organisme.

1 Le modèle de von Bertalanffy (1938)

On note $T(t)$, $S(t)$, $P(t)$ la taille, la surface et le poids à l'instant t. On admet qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $S = aT^2$ et $P = aT^3$. On admet que $\forall t >$, $T(t) > 0$, $S(t) > 0$ et $P(t) > 0$.

Le modèle suppose que l'accroissement du poids P est proportionnel à la surface S et qu'il y a un freinage proportionnel au poids :

$$P' = bS - cP, \text{ avec } b > 0 \text{ et } c > 0.$$

1. Montrer que T est solution de l'équation différentielle suivante notée (E) :
$$y' + \frac{c}{3}y = \frac{b}{3} \tag{E}$$
2. Exprimer alors $T(t)$ en fonction de t, b et c.
3. En déduire que le poids évolue vers un poids maximum P_m (à préciser), et que l'on a :
$$P' = cP\left[\left(\frac{P_m}{P}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right].$$
4. Montrer que la surface poids évolue vers un maximum S_m (à préciser) et que l'on a :
$$S' = \frac{2}{3}cS\left[\left(\frac{S_m}{S}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

2 Le modèle de F.J. Richard (1959)

Si $y(t)$ est une grandeur liée à la croissance d'un organisme (taille, poids ...), un modèle général est donnée par l'équation différentielle :

$$y' = \frac{c}{3}\frac{y}{1-\alpha}\left[\left(\frac{A}{y}\right)^{1-\alpha} - 1\right].$$

où c et A sont des constantes ($A > 0$), et α un paramètre réel ($\alpha \neq 1$).

5. Vérifier qu'il existe trois valeurs particulières de α pour lesquelles on retrouve le modèle de von Bertalanffy pour la taille, le poids et la surface.
6. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.
   (a) En supposant que $A = 1$, démontrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :
   $$y' = \lambda y(1-y)$$
   où λ est une constante à déterminer en fonction de c.
   (b) En posant $z = \dfrac{1}{y}$, montrer que z vérifie l'équation différentielle suivante :
   $$z' = -\lambda(z-1).$$
   (c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de $y(t)$.
   (d) En admettant que $y(0) = 0,001$ et que $\lambda > 0$, déterminer l'expression de $y(t)$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

Nom et Prénom : ....

Annexe : à rendre avec la copie

Exercice 1 : questions 1 et 4